NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions d'examen, en 1844

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 601-608
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__601_1>

QUESTIONS D'EXAMEN, en 1844 (*).

Algèbre.

1. Faire voir que dans l'extraction de la racine $m^{ième}$ d'un polynôme entier par rapport à x, les degrés des restes successifs vont toujours en s'abaissant.

2. $f(x)$ est un polynôme entier et rationnel par rapport à x, l est la limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x)=0$; si dans le polynôme $f(x)$ on substitue à la place de x une suite de nombres l', l'', l''', etc., croissant et plus grands que l, les résultats $f(l')$, $f(l'')$, $f(l''')$, etc., de ces substitutions, seront-ils aussi croissants ?

3. Soient a, b, c les trois racines de l'équation

$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

(*) M. le professeur Leon Anne a bien voulu nous communiquer ces questions On en donnera les solutions dans le courant de 1845, ainsi que celles des questions pour l'admission à l'Ecole normale et pour l'agregation.

Calculer la somme $a^2 + b^2 + c^2$; cette somme peut-elle donner une limite supérieure des racines positives de l'équation ?

4. Trouver le nombre qui substitué à la place de x rend à la fois les deux fractions $\frac{7x-1}{4}$ et $\frac{5x+3}{12}$ entières; peut-on voir *à priori* que le problème est impossible ?

5. Un nombre peut-il être à la fois un quarré et un cube parfait, sans être une sixième puissance ?

6. Discuter par la résolution directe et par le théorème de M. Sturm, l'équation $ax^{2m} + bx^m + c = 0$. Montrer l'identité des conséquences de ces deux modes.

Géométrie analytique.

1. Conditions pour que les deux tangentes menées d'un même point à une parabole, soient égales.

2. Étant donnés en grandeur et en direction les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole, déterminer graphiquement en grandeur et en direction, et sans tracer la courbe, un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.

3. On mène à une parabole une suite de cordes parallèles que l'on partage dans un rapport donné, trouver le lieu des points de division.

4. Trouver le lieu des centres des cercles tangents à une parabole et à sa directrice.

5. Le point de division d'une droite de longueur $(a+b)$, qui glisse dans un angle droit, décrit une ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$, en quelle position cette droite est-elle tangente à cette ellipse ?

6. D'un point donné mener à une parabole, une sécante dont la corde d'intersection soit d'une longueur donnée, et

trouver le lieu du sommet de l'angle circonscrit à cette parabole et ayant cette corde pour corde de contact.

7. Trouver le lieu des milieux des tangentes à une conique terminées au point de contact et à l'axe.

8. Déterminer une ellipse passant par un point donné d'une hyperbole et ayant les mêmes foyers qu'elle.

9. Sur le grand axe d'une ellipse, et des deux côtés du centre, on prend des distances égales à une longueur donnée, exprimer la somme des distances de ces deux points à un point quelconque de l'ellipse ; conditions pour que cette somme soit rationnelle.

10. De ce que la somme ou la différence des quarrés de deux demi-diamètres d'une ellipse ou d'une hyperbole, est égale à la somme ou à la différence des quarrés des axes, peut-on conclure que ces diamètres sont conjugués ?

De ce que la surface d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse ou à une hyperbole est équivalente à la surface du rectangle des axes, peut-on conclure que les côtés de ce parallélogramme sont parallèles à un système de diamètres conjugués ?

11. Déterminer graphiquement et par l'analyse une parabole tangente en deux points donnés à deux droites données.

12. En quel point de l'ellipse la tangente fait-elle avec le rayon vecteur mené au point de contact un angle de 45° ?

13. Trouver sur la circonférence d'une ellipse le point le plus éloigné de l'extrémité du petit axe.

Remarquer pour la discussion qu'il faut non-seulement que l'ordonnée du point soit réelle, mais encore qu'elle soit plus petite que b.

Statique.

1. Lieu des centres de gravité des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole.

2. En appuyant la pointe d'un crayon contre un fil dont les deux extrémités sont fixées, le crayon décrit une ellipse; quelle est en chaque point de la courbe la tension du fil, et en quel point est-elle la plus grande ou la plus faible? Trouver le lieu décrit par le centre de gravité du fil.

3. Trouver la résultante de deux forces concourantes; mais dont on n'a pas le point de rencontre.

4. Trouver les tensions horizontales de deux clous auxquels est attaché un cordon tendu à angle droit par une force verticale.

Géométrie descriptive.

1. Étant donnée la projection horizontale d'un point d'une surface cylindrique à base quelconque, trouver la projection verticale.

2. Plan tangent à la sphère en un point de cette surface, donné en projection horizontale.

3. Construire un trièdre dont on donne un angle dièdre, et les deux faces qui le comprennent; une des faces est un angle droit.

4. Construction des polyèdres réguliers.

5. Inscrire une sphère dans un tétraèdre.

6. On donne un plan et la projection horizontale d'une droite; déterminer sa projection verticale, connaissant l'angle que cette droite fait avec le plan.

Courbes à construire.

$$y^2 = \frac{1}{x+1},$$

$$y^2 = \frac{1}{x-1},$$

$$y = \frac{1}{1-x^2},$$

$$y = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \frac{x}{x^2-1},$$

$$y = \frac{1}{x^2-x},$$

$$y^2 = \frac{x}{1+x},$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$y = \frac{2x-1}{x^2+1},$$

$$y = \frac{x+1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{x^2-x}{1+x},$$

$$y = \frac{2-x}{x^2 \pm 1},$$

$$y = \frac{1}{x^4-x+1},$$

$$y = \frac{2x-x^2}{x^2-1},$$

$$y = \frac{1-x^3}{x^2},$$

$$y = x^3 - 1,$$

$$(y-1)x^2 + x - 2 = 0,$$

$$y^2 = \frac{1-x^3}{x},$$

$$y = x \pm x\sqrt{x},$$

$$y = \pm(x-2)\sqrt{x-1},$$

$$y = x \pm \sqrt{5x^2 - 6x + x^3},$$

$$xy^2 - 2xy + 4y + x^3 = 0,$$

$$y = -1 + \frac{2x-1}{x^2-1},$$

$$y = x - 1 + \frac{x}{x^2+1},$$

$$y = x - 1 + \frac{x}{x^2-1},$$

$$y = x - 1 \pm \sqrt{1 - x^3}.$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2-1},$$

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x^2},$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2+x},$$

$$y^2 = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

$$y^3 = \frac{x^2+1}{x},$$

$$y^3 = \frac{x}{x^2+1},$$

$$y = \frac{2-x}{1+x^3},$$

$$y = \frac{3x-1}{x^3},$$

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x^2},$$

$$y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{1-x},$$

$$y = x \pm \sqrt{x^4+4x},$$

$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^2 - x},$$
$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^3 - 6x + 4},$$
$$y = x^2 \pm \sqrt{x^3 - 4x},$$
$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 1},$$
$$y = \frac{x}{1 \pm \sqrt{1 - x^2}},$$
$$y^2 = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$
$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x(x-1)},$$
$$y = \frac{1}{x+1} \pm \sqrt{x^2 - 1}$$
$$y^2 = x^4 + x,$$
$$y = \pm x \sqrt{\frac{1}{x^2 - x}},$$
$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$
$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^2 - 1},$$
$$y = x^2 \pm \frac{1}{x^2},$$
$$y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1},$$
$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x}{1 - x^2}},$$
$$y^2 = \frac{1}{1 - x^3},$$
$$y = x^2 \pm \sqrt{\frac{1}{1 - x}},$$
$$y = x \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$
$$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x}{1 - x^2}},$$

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{4x - x^2}},$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^4}},$$

$$\rho = \frac{1}{1 + \sin\omega - \cos\omega},$$

$$\rho = \cos\omega + 2\sin\omega,$$

$$\rho = \frac{1}{3\,\text{tang}\,\omega},$$

$$\rho = \frac{2}{1 + \text{tang}\,\omega},$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$\rho = \text{tang}\,\omega,$$

$$\rho = 1 + 2\cos\omega,$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega},$$

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega + \cos\omega},$$

$$\rho = \frac{1}{3\sin\omega - 2\cos\omega},$$

$$\rho = \frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega},$$

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$a = \log\sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}},$$

$$b = \text{arc tang}\,\frac{y}{x - c} - \text{arc tang}\,\frac{y}{x + c}.$$