A. J. H. VINCENT

Philologie. Note sur les deux locutions:partager une droite, une quantité, en moyenne et extrême raison, et donnée qu'en raison. Altérations probables dans le texte d'Euclide

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 5-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

PHILOLOGIE.

NOTE

Sur les deux locutions : PARTAGER UNE DROITE, UNE QUANTITÉ, EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON; *et* DONNÉE QU'EN RAISON. — *Altérations probables dans le texte d'Euclide.*

PAR A. J. H. VINCENT,
Professeur au collége de Saint-Louis.

I. On connaît la locution employée dans tous les ouvrages élémentaires, pour indiquer le mode de *partage d'une droite en deux parties, dont l'une soit* MOYENNE *proportionnelle entre l'autre partie* devenue ainsi l'un des termes EXTRÊMES de la proportion, *et la ligne entière.*

Or, dès 1405 (1), le Vénitien *Zamberti*, dans son interprétation latine d'Euclide, imprimée cent ans plus tard, remarquait déjà que la locution *secundùm mediam et extremam rationem*, locution d'où la nôtre tire son origine, ne

(1) Voyez la Bibliothèque grecque de Fabricius, édition de Harles, t. IV, p. 52

dit pas ce qu'elle doit dire. En effet, dans une proportion, il n'y a point deux raisons, l'une moyenne et l'autre extrême; il n'y en a qu'une seule, la même pour les deux derniers termes que pour les deux premiers; et l'on ne saurait vouloir dire non plus que cette raison est à la fois moyenne et extrême, ce qui serait également absurde.

Reconnaissant aussi l'inexactitude de la locution, M. le docteur *Terquem*, dans une *note* insérée, il y a peu d'années (en 1838), dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (t. III, p. 97), propose, d'après *Lorentz*, de dire qu'*une droite est partagée en proportion continue, lorsque*, etc. Je souscrirais volontiers à cette rédaction, si elle ne paraissait signifier tout autre chose que ce que l'on veut dire. car comment exprimerait-on différemment que la droite est divisée en *trois* segments fournissant à eux seuls tous les termes de la proportion?

Mais moi-même précédemment, en 1834, dans la 3e édition de mon *Cours de Géométrie*, j'avais cru devoir, à la phrase vulgaire, en substituer une autre plus simple : *Partager une droite en moyenne et extrême.* Cependant, l'avantage de la brièveté ne serait point un motif suffisant pour justifier ce changement s'il n'était d'ailleurs d'accord avec la logique. Or, en effet, l'expression ordinaire signifie-t-elle autre chose que *partager une droite suivant la raison de moyenne à extrême*, c'est-à-dire de telle façon que l'une des parties soit le terme moyen de la proportion, et l'autre partie un des termes extrêmes, l'autre terme, qu'il faut bien trouver quelque part, étant alors la ligne entière? Et dès lors, cet énoncé : *Partager une droite en moyenne et extrême* (sous-entendez le mot *parties* au pluriel, et non le mot *raison* au singulier) ne présente-t-il point une locution tout à fait convenable, tant sous le rapport de la justesse que sous celui de la simplicité et de la brièveté? Quant à moi, son exactitude me paraît si incontestable, qu'ayant été sollicité, à l'occasion de la publication récente de la 5ᵉ édition de mon *Cours*, de rétablir la locution antique et solennelle *moyenne et extrême raison*, je n'hésitai point à en appeler au texte d'Euclide, persuadé qu'on l'avait mal traduit.

Mon étonnement, je le confesse, fut extrême, quand je lus dans l'édition de Peyrard, comme dans toutes les autres, ces phrases auxquelles je n'avais pas jusqu'alors prêté une attention suffisante : Ἄκρον καὶ μέσον λόγον (sous-ent. κατὰ) εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν.... κ.τ.λ. (liv. VI, déf. 3 ; tom. I, p. 290) ; Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν (*ibid.*, prop. 30, p. 366) ; Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ (liv. XIII, prop. 1re, tom. III, p. 212).....

Je ne craignis point d'avancer alors que les manuscrits avaient été mal lus, que les apices abréviatifs remplaçant les terminaisons et devenant ainsi, dans les manuscrits, les seuls indices de la déclinaison (apices qu'il est si facile de confondre) avaient été pris les uns pour les autres ; que par suite, dans la transcription, les terminaisons ου et ον s'étaient substituées l'une à l'autre par cette sorte d'accident que les grammairiens nomment *attraction*, et qu'en définitive, les mots ἄκρον καὶ μέσον λόγον devaient être lus partout ἄκρου καὶ μέσου λόγου.

Malheureusement encore, ma conjecture ne se trouva nullement confirmée par les manuscrits, dont la plupart même portent écrit en toutes lettres ἄκρον καὶ μέσον.....

En outre, Proclus, Pappus, Ptolémée, lorsqu'ils ont à rendre la même idée, ne s'expriment pas autrement.

Battu ainsi en première instance et en appel, j'avais au moins, semblait-il, la consolation de l'être en compagnie de la logique. Mais après tout, il me restait la ressource des traductions orientales : je résolus d'y recourir. Je m'adressai en conséquence au savant M. Munck, qui eut l'obligeance de consulter à ma prière, la traduction arabe, traduction toute littérale, faite au neuvième siècle par *Isaac ben Honaïn*, et qui me donna en ces termes le sens du texte arabe de la définition 3ᵉ du livre VI : *Une ligne droite est dite partagée suivant la proportion d'*UNE *moyenne et de* DEUX *extrêmes, lorsque*, etc. De même, la proposition 30ᵉ du même livre s'énonce ainsi d'après le même texte : *Partager une ligne droite suivant la proportion d'une moyenne et de deux extrêmes*. De même enfin la proposition 1ʳᵉ du livre XIII : *Lorsqu'une droite est partagée suivant la proportion d'une moyenne et de deux extrêmes:* Al-khatt al-maksoum à la nisbet dzât ouast outarféïn...

La traduction hébraïque faite au 13ᵉ siècle par *Mosé ben Samuel Ebn Tibbon*, s'exprime d'une manière tout à fait analogue ; mais, peut-être, m'a dit M. Munck, cette traduction a-t-elle été faite d'après l'arabe. Quoi qu'il en soit, la traduction hébraïque n'en est pas moins une confirmation de l'arabe.

Il en est de même de la traduction latine d'*Adhélard*, commentée par *Campanus*, et qui vraisemblablement aussi est faite sur l'arabe ; l'hypothèse contraire lui donnerait beaucoup plus encore d'autorité et d'importance dans la question actuelle. Elle s'exprime ainsi, lib. VI, def. 3 : *Linea dicitur dividi secundùm proportionem habentem medium et duo extrema...* Les deux autres passages sont conformes au premier.

Or, de tout cela on peut conclure, ce me semble, avec quelque probabilité, et de plus hardis que moi diront *avec certitude* que si la locution ἄκρον καὶ μέσον λόγον peut être considérée comme passée, depuis un temps immémorial, à l'état d'*idiotisme géométrique*, il n'en est pas moins vrai que la leçon primitive a dû être ἄκροιν καὶ μέσου λόγον ; le mot ἄκροιν, au duel, au lieu du singulier ἄκρου, n'en est que plus expressif, puisqu'il fait voir que l'on trouve tout à la fois, sur la ligne divisée conformément à la définition, les trois termes de la proportion, tant les deux extrêmes que le terme moyen.

En définitive donc, JE MAINTIENS MON ÉNONCE.

II. J'en viens à une seconde correction que j'ai aussi à proposer pour le texte grec d'un autre ouvrage du même auteur. Il s'agit ici d'une expression bizarre qui a doté notre langue de cette locution non moins étonnante que celle dont nous venons de nous occuper, savoir : *Quantité donnée qu'en raison*; en latin : *Magnitudo data quam in ratione.*

C'est ainsi que, d'après les définitions 11[e] et 12[e] du livre des *Données d'Euclide*, *Une grandeur est plus* $\left\{\begin{array}{l}\textit{grande}\\ \textit{petite}\end{array}\right\}$ *à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en raison, quand la grandeur donnée étant* $\left\{\begin{array}{l}\textit{retranchée, le reste}\\ \textit{ajoutée, la somme}\end{array}\right\}$ *a avec l'autre une raison donnée.*

Il ne faut nullement être géomètre pour reconnaître ici une locution de pur argot · quel moyen, en effet, de faire l'analyse du *qu'en raison*? Aussi M. *Chasles*, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (page 11, note 1[re]), dit-il que c'est une expression *embarrassante*, et dont le sens est *difficile à comprendre, même dans la définition* qu'en donne Euclide; après quoi le savant géomètre en fournit l'explication suivante : « Soit A » plus grand que B d'une donnée qu'en raison; soit C cette » donnée et μ la raison, on aura $\dfrac{A - C}{B} = \mu$. »

Pour embrasser les deux définitions dans une même formule, nous écrirons $\dfrac{A \mp C}{B} = \mu$.

Ces préliminaires posés, remontons aux deux définitions précédentes du même livre (déf. 9 et 10) : *Une grandeur est plus* $\left\{\begin{array}{l}\textit{grande}\\ \textit{petite}\end{array}\right\}$ *qu'une autre grandeur, d'une grandeur donnee, quand la grandeur donnee étant* $\left\{\begin{array}{l}\textit{retranchée de}\\ \textit{ajoutée à}\end{array}\right\}$ *la plus*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{grande, le reste}\\ \textit{petite, la somme}\end{matrix}\right\}\ \textit{est égal à la plus}\ \left\{\begin{matrix}\textit{petite}\\ \textit{grande}\end{matrix}\right\}.$$

Ces deux définitions, comme on le voit, ne considèrent qu'un cas particulier des deux autres, celui de $\mu = 1$, ou $A \mp C = B$; ou plutôt, les deux autres ne sont qu'une généralisation de celles-ci. Dans les définitions 9 et 10, la raison donnée est la raison d'*égalité*, ou *l'unité* ; dans les définitions 11 et 12, la raison donnée devient une raison quelconque ; et ainsi ces deux dernières définitions énoncent relativement à une raison quelconque, ce que les deux premières disent d'une manière absolue, ou pour la raison d'égalité ; de sorte que les mots *qu'en raison* doivent être, pour le sens, remplacés par ceux-ci : *relativement à* ou *quant à une raison donnée.*

Or, si maintenant nous remontons au texte : μέγεθος μεγέθους δοθέντι μεῖζον ou ἔλασσόν ἐςιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν κ.τ.λ., il ne nous sera pas difficile de reconnaître que tout le mal provient d'une faute d'orthographe dans la particule ἢ, que les copistes, éditeurs, traducteurs, semblent s'être primitivement accordés à considérer comme complétive du comparatif : *Magnitudo magnitudine data* $\begin{matrix}\textit{major}\\ \textit{minor}\end{matrix}$ *est quam in ratione* (Euclide de Peyrard, tome III, page 302), tandis qu'il eût fallu écrire, *avec l'esprit rude, l'accent circonflexe*, et *l'iota souscrit* : ῇ, c'est-à-dire *quà*, *quantùm ad*, *en tant que* ; d'où il résulte qu'en français nous devons dire : *Une quantité est plus grande ou plus petite qu'une autre, d'une quantité donnée, relativement* ou *quant à une raison donnée, lorsque, etc.* (1).

(1) Aucune traduction arabe du livre des *Données* ne se trouvant à la bibliothèque du Roi, je n'ai malheureusement pu employer le même moyen de contrôle que pour le cas précédent.

P. S. — Je profite de l'occasion pour adresser à M. le Rédacteur des *Annales*, une observation relative à deux articles de M. *Finck*, insérés, le premier dans le tome I, page 353, le second, tome II, p. 329.

Il s'agit, M. le Rédacteur, dans ces deux articles, d'une note que j'ai donnée dans votre tome I, p. 272, *sur la construction des tables de sinus naturels.* Dans cette note, après avoir reproduit une démonstration qui se trouve à la page 233 du *Géomètre* de M. Guillard, pour la limite de l'erreur que l'on commet en prenant l'arc pour son sinus, démonstration dont l'idée fondamentale est due à M. *Giraud*, alors élève du collége de Toulon, j'ai indiqué l'emploi de la formule de *Th. Simpson* pour la construction des tables de sinus naturels, en faisant voir (je l'ai cru du moins) que les douze premières décimales de π suffisaient pour la détermination des douze premières décimales des sinus et cosinus de tous les arcs croissant de seconde en seconde centésimales.

Pour le premier point, c'est-à-dire pour la limite de l'erreur que l'on commet sur le plus petit arc, M. *Lionnet* y est revenu dans le tome II, p. 216, et j'ai été très-satisfait de reconnaître, d'après son excellent article, qu'il n'est pas même nécessaire, pour arriver à la limite obtenue, de recourir à la formule de trissection, et que la bissection est suffisante. Je m'empresse donc d'adopter la modification qu'il propose, comme rendant la démonstration plus élémentaire.

Quant au second point (l'emploi des formules de *Th. Simpson*), ma *Note* a fait reconnaître à M. *Finck*, comme il le dit au tome I, p. 353, et le répète au tome II, p. 333, qu'*il avait été trop loin* dans sa Trigonométrie, en accusant d'insuffisance lesdites formules ; mais en même temps, cet estimable et savant professeur, dans son premier article, accusait ma méthode de *négliger des erreurs qui modifient l'exactitude de mes résultats*. Cependant comme, après tout, il promettait de revenir sur ce sujet, j'ai supporté pendant un an entier, sans mot dire, l'interdit prononcé contre ma méthode, espérant toujours l'article annoncé. Enfin, cet article a paru dans le n° d'août dernier. M. Finck y emploie le calcul intégral aux différences finies pour évaluer l'erreur que peuvent produire les formules de *Th. Simpson*. Si le but est le même, le moyen est bien différent de celui que j'ai employé, n'ayant eu en vue que les élèves de nos classes élémentaires; et encore M. Finck termine-t-il son savant article en disant que *rien n'empêche d'en faire autant*, c'est-à-dire de remplacer ses formules d'intégration par un procédé élémentaire, comme si je n'en avais pas donné un. D'où il résulte qu'en définitive M. Finck maintient sa sentence d'interdit, sans toutefois la motiver plus que la première fois, sans rien indiquer pour corriger l'imperfection qu'il a découverte dans mon procédé, et sans proposer lui-même de méthode qui puisse atteindre le même but, puisqu'au contraire, d'après sa conclusion, il reste à *en faire autant* que j'en ai fait, sauf les erreurs dont j'attends la rectification.

Dans cet état de choses, et malgré l'horreur profonde que j'éprouve pour toute espèce de polémique, puis-je me dispenser de prier M. Finck de vouloir bien déclarer s'il reconnaît la vérité de ce principe : que *dans une méthode de calcul qui doit présenter le double caractère d'être* ABRÉVIATIVE *en même temps qu'*APPROXIMATIVE, *si le degré d'approximation demandé est* $\frac{1}{\alpha^n}$, *on doit négliger les erreurs de l'ordre* $\frac{1}{\alpha^p}$, (p *étant* $> n$), *toutes les fois que celles-ci ne se multiplient pas de manière à donner une somme de l'ordre* $\frac{1}{\alpha^n}$?

2° Dans le cas de l'affirmative, de dire en quoi j'ai transgressé ce principe, et de donner l'évaluation des erreurs que j'ai commises.

3° Enfin, si M. Finck admet que le principe précité est exact, et ne trouve ou ne prouve pas que j'aie commis en l'appliquant aucune erreur de l'ordre proposé, j'attends de la loyauté bien connue de notre estimable confrère, de reconnaître qu'en ceci encore *il a été trop loin*.

Sinon, je suis tout disposé d'avance à me rendre à ses raisons; et je recevrai ce second perfectionnement à ma méthode avec le même plaisir que j'ai reçu le premier.