

HENRI FAURE

Solution du problème 90

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 592-595

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__592_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 90.

PAR M HENRI FAURE,

Élève en spéciale.

1° (*Fig. 59.*) Les trois points GAD sont sur une droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A . Car les angles DAC , FAG étant égaux, et de plus la ligne FAC étant droite, GAD l'est aussi. Si l'on joint FB , cette ligne est perpendiculaire à GAD ; or la bissectrice de l'angle A étant parallèle à FB , est aussi perpendiculaire à GAD .

2° AL est perpendiculaire à GC comme AM à BD. Les angles BAL, CGB étant égaux, les triangles GOB, AOK ayant d'ailleurs les angles en O égaux, il doit en être de même des angles OBG, et AKO; donc ce dernier est droit.

Même démonstration pour prouver que AM est perpendiculaire à BD.

3° AO = AR. Les deux triangles GBD, ARD étant semblables, on a la proportion

$$(1) \quad BG : AR :: GD : AD.$$

Les triangles semblables CGF, CAO donnent aussi

$$(2) \quad FG \text{ ou } BG : AO :: FC : AC,$$

mais au moyen des triangles semblables GFA, ACD on obtient successivement

$$AD : AG :: AC : AF,$$

d'où

$$AD + AG : AD :: AC + AF : AC,$$

ou

$$GD : AD :: CF : AC.$$

Comparant cette proportion aux précédentes, on en déduit l'égalité de AO et AR.

4° $\frac{AM}{AL} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DR}{OG}$. Joignons OR. Le triangle AOR étant isocèle, il s'ensuit que OR est parallèle à GD; donc on a les proportions :

$$BD \text{ ou } AM : RD :: AB : AO.$$

$$GO : GC \text{ ou } AL :: AR \text{ ou } AO : AC,$$

multipliant ces proportions membre à membre

$$AM \cdot GO : RD \cdot AL :: AB : AC,$$

d'où

$$AM \cdot GO \cdot AC = AL \cdot AB \cdot DR,$$

ce qui revient à l'égalité ci-dessus.

5° $\frac{AN}{AK} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR}$. Joignons KN. Si l'on inscrivaient le quadrilatère AKIN dans une circonférence (ce qui est possible d'après ce que l'on a vu plus haut), l'angle KNI serait égal à l'angle KAI comme ayant même mesure; or il est aussi égal à BLA, donc le quadrilatère LKNM est inscriptible. Traçant la circonférence, les deux sécantes AL, AM, issues du même point A, donnent le rapport

$$\frac{AN}{AK} = \frac{AL}{AM} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR},$$

d'ailleurs on peut aussi le prouver de la manière suivante. au moyen des triangles semblables AOK, GOB on a

$$AK : GB :: AO : GO,$$

et de même par les triangles semblables ANR, DRC

$$AC : AN :: DR : AR = AO;$$

multipliant ces deux proportions membres à membres, on arrive à la solution.

6° Les droites AIH, BD, GC se coupent au même point. Si je prouve que les six segments AO, BO, BS, SC, CR, RA jouissent de cette propriété que le produit (*)

$$AO \cdot BS \cdot RC = BO \cdot SC \cdot AR,$$

les lignes AS, BR, DC se couperont au même point d'après un théorème connu des transversales. Or, $AO = AR$; donc il faut prouver l'égalité

$$BO \cdot SC = BS \cdot RC,$$

les triangles semblables GOB, AOC donnent

$$GB \text{ ou } AB : AC :: BO : AO,$$

de même les triangles ARB, RCD donnent

$$AB : CD = AR : RC = AO : RC;$$

(*) La lettre S manque dans la figure.

multipliant ces deux proportions terme à terme, on a

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BO : RC.$$

or on a aussi

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BS : CS,$$

donc

$$BO : RC :: BS : CS$$

et

$$BO \cdot CS = RC \cdot BS.$$

Si l'on construisait les carrés dans le sens inverse on verrait que la même propriété a encore lieu.

Si l'on prolonge AH, GF, ED, ces trois droites se couperont en un même point. Car soit P le point de rencontre de GF avec ED; joignons AP; l'angle PAF = CAH d'après l'égalité des triangles ABC, PAF. De plus l'on voit que AP = BC = SH. Si, au lieu de carrés, on construisait sur les trois côtés du triangle ABC des rectangles semblables, les mêmes propriétés subsisteraient encore.