Nouvelles annales de mathématiques

Armand Farcy

Note sur la recherche élémentaire du nombre π

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 582-585

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__582_1>

NOTE

SUR LA RECHERCHE ÉLÉMENTAIRE DU NOMBRE π.

PAR M. ARMAND FARCY,
ancien élève de l'École polytechnique.

---

1. Les méthodes élémentaires pour le calcul du nombre π sont au nombre de quatre : deux directes et deux indirectes ; deux fondées sur la formule $C = 2\pi R$, ne faisant dépendre π que de la notion des longueurs ; deux fondées sur la formule $S = \pi R^2$, faisant dépendre π de la notion des surfaces, ce qui est moins conforme à sa définition habituelle.

La première (méthode directe fondée sur la formule $C = 2\pi R$), dont Archimède est le premier auteur, consiste à chercher la longueur d'une circonférence d'un diamètre connu, spécialement d'un diamètre 1, comme limite commune des périmètres réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La seconde (méthode directe fondée sur la formule $S = \pi R^2$), introduite par Jacques Gregory, géomètre anglais, consiste à chercher la surface d'un cercle de rayon connu, spécialement de rayon 1, comme limite commune des polygones réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La troisième (méthode indirecte fondée sur la formule $C = 2\pi R$), dont Schwab est le premier auteur, consiste à chercher le rayon d'une circonférence de longueur connue, comme limite commune des rayons et des apothèmes, d'un périmètre régulier de longueur constante, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La quatrième (méthode indirecte fondée sur la formule $S=\pi R^2$), et dont je ne trouve de trace que dans Legendre (liv. IV, prop. XVI), consiste à chercher le rayon d'un cercle de surface connue, comme limite commune des rayons et des apothèmes d'un polygone régulier de surface constante, dont on double continuellement le nombre des côtés.

Sans exposer ici ces méthodes, et sans discuter leur supériorité relative, ce qui serait assez épineux, vu les exigences contraires du point de vue géométrique et de la pratique du calcul, nous renverrons, pour la première, aux *Éléments de géométrie* de M. Lionnet, où elle nous a paru d'une exposition plus élégante et plus heureuse que partout ailleurs; pour la seconde et la quatrième, à la *Géométrie* de Legendre; pour la troisième, à celle de M. Vincent.

II. M. Vincent tire de la méthode de Schwab cet élégant théorème : « *Une suite de nombres commençant par* 0 *et* 1, *et dont les suivants sont alternativement, à partir du troisième inclusivement, moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge vers la valeur de* $\frac{2}{\pi}$; » et le but de cette note est de montrer que ce théorème résulte également des deux premières méthodes (*).

1° M. Lionnet désignant par p et P deux périmètres réguliers semblables inscrits et circonscrits, par p' et P' ceux d'un nombre double de côtés, parvient aux formules $P'=\frac{2Pp}{P+p}$; $p'=\sqrt{P'p}$. Mais si au calcul des périmètres

(*) L'énoncé de ce théorème appartient aussi à Schwab. Tm.

successifs on substitue celui des nombres réciproques, on trouve : $\frac{1}{P'}=\frac{\frac{1}{P}+\frac{1}{p}}{2}$; $\frac{1}{p'}=\sqrt{\frac{1}{P'}\cdot\frac{1}{p}}$ C'est-à-dire que ces nombres se succèdent alternativement, moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui précèdent. — Prenant alors pour premier polygone le quarré circonscrit de côté $\frac{1}{2}$, on a : $P=2$, $p=\sqrt{2}$, et pour la série des nombres réciproques : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$, etc..... ou bien, prenant pour premiers termes 0 et 1, ce qui ne change rien à la loi, puisque $\frac{1}{2}$ est moyenne différentielle entre 0 et 1, et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ moyenne proportionnelle entre 1 et $\frac{1}{2}$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+1}{4},\ \text{etc....};$$

d'où le théorème de M. Vincent.

2° Legendre désignant par A et B la surface de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit, par A' et B' celles des polygones d'un nombre double de côtés, parvient aux formules $A'=\sqrt{A\,.\,B}$; $B'=\frac{2AB}{A+A'}$. Mais si au calcul des surfaces on substitue celui des nombres réciproques, on trouve : $\frac{1}{A'}=\sqrt{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}}$ et $\frac{1}{B'}=\frac{\frac{1}{B}+\frac{1}{A'}}{2}$, c'est-à-dire que ces nombres se succèdent alternativement, moyens proportionnels et moyens différentiels, entre les deux qui précèdent. Prenant alors pour premier polygone le quarré inscrit de côté 1, on a : $A=1$, $B=2$, et pour la série des nombres réciproques : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}$, etc..... ou bien, prenant pour premier terme 0, ce qui ne change point la loi, puisque $\frac{1}{2}$ est moyenne différentielle entre 0 et 1 :

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}, \text{ etc....};$$

d'où le théorème de M. Vincent.

Quant à la quatrième méthode, en désignant par R et r le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, par R′ et r' ceux du polygone régulier de même surface, mais d'un nombre double de côtés, on a, suivant Legendre, les formules : $R' = \sqrt{R.r}$, $r' = \sqrt{r\frac{R+r}{2}}$ qui, en partant de $R = 1$ et $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ rayon et apothème du quarré de surface égale à 2, permet d'approcher indéfiniment de $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, d'où l'on peut tirer un théorème analogue à celui de M. Vincent, mais fondée sur une série dont la marche est moins régulière et le point de départ moins caractérisé, par l'impossibilité d'y introduire le terme zéro.

Note. On déduit de $B' = \frac{2AB}{A+A'}$ cette autre formule $B' = \frac{2BA'}{B+A'}$, que Saurin a démontré directement (*Mémoires de l'Académie*, 1723, p. 10); elle donne cet énoncé élégant et mnémonique : A′ est une moyenne géométrique entre B et A, et B′ une moyenne harmonique entre B et A′ ; il serait intéressant, mais très-difficile, de trouver la limite de la série de Schwab par un moyen direct, purement analytique.

Tm.