NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de MM. Sturm et Cauchy, déduits d'un seul principe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 577-580

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__577_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Fin, voir page 555.)

26. M. Gauss est le premier qui ait démontré qu'on peut de l'origine comme centre décrire un cercle de rayon fini sur lequel on a $E=2n$; n étant le degré de l'équation $f(z)=0$; par conséquent, il existe toujours dans l'intérieur de ce cercle n points-racines, en d'autres termes l'équation $f(z)=0$ a toujours n racines. La démonstration de M. Gauss suppose que les coefficients sont réels ; mais elle subsiste encore, lorsqu'ils ont la forme imaginaire ; alors sans rien changer aux raisonnements, il faut substituer aux coefficients leurs modules ; c'est ce qu'ont fait MM. Sturm et Liouville ; sauf cette légère modification, la démonstration de ces savants est complétement identique à celle de l'illustre analyste : s'ils ne l'ont pas cité, c'est que, comme nous l'avons dit, la dissertation latine est devenue extrêmement rare, même en Allemagne. Nous allons rapporter cette démonstration modifiee et précédée de quelques éclaircissements.

27. Problème. Soit la suite

$$P=r^m\cos\varphi+A_1r^{m-1}\cos\varphi_1+A_2r^{m-2}\cos\varphi_2+\ldots+A_m\cos\varphi_m;$$

m et n nombres entiers positifs; $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont des nombres essentiellement positifs ; $r>1$; $\cos^2\varphi>\frac{1}{2}$ ou $=\frac{1}{2}$, quelle valeur faut-il donner à r, pour que le premier terme devienne plus grand que la somme de tous les termes suivants?

Solution. On veut avoir

$$r^m \cos \varphi > A_1 r^{m-1} \cos \varphi_1 + \ldots . A_m \cos \varphi_m ;$$

$\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$ etc., étant des fractions, et $r > 1$, on satisfera *à fortiori* à cette inégalité, si l'on pose :

$$r^m \cos \varphi > r^{m-1} (A_1 + A_2 + \ldots . A_m),$$

$$\text{ou } r \cos \varphi > A_1 + A_2 + \ldots . A_m.$$

Soit $A_1 + A_2 + \ldots . A_m = K$; on aura donc $r > \frac{K}{\cos \varphi}$, ou bien $r > K\sqrt{2}$; si $K > \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors cette inégalité entraîne celle-ci $r > 1$; si $K < \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors de l'inégalité $r > 1$ on déduit $r > K\sqrt{2}$; ainsi il suffit de faire r plus grand que l'un des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$.

Corollaire 1. Ainsi, on peut toujours donner à r une telle valeur, que le signe de P soit le même que celui du premier terme.

Corollaire 2. On parvient aux mêmes conclusions en remplaçant partout les cosinus par des sinus.

28. Problème. Quels sont les arcs qui satisfont aux inégalités $\cos^2 \varphi > \frac{1}{2}$ et $\sin^2 \varphi > \frac{1}{2}$?

Solution. Les arcs compris entre

$$\frac{7\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4},$$

satisfont à l'inégalité $\cos^2 \varphi > \frac{1}{2}$.

Et les arcs compris entre

$$\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{5} \text{ et } \frac{7\pi}{4},$$

satisfont à l'inégalité $\sin^2\varphi > \frac{1}{2}$, et l'on peut augmenter chacun de ces arcs de π ; car

$$\cos^2(a+\pi) = \cos^2 a \,;\ \sin^2(a+\pi) = \sin^2 a.$$

29. Étant donnée l'équation

$$fz = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots . = 0,$$

décrire s'il est possible, de l'origine comme centre, un cercle qui renferme tous les *points-racines?*

Solution. On peut toujours supposer le coefficient

$$A_p = \rho_p\left(\cos\alpha_p + \sin\alpha_p \sqrt{-1}\right),$$

ρ étant essentiellement positif ; si A_p est réel alors $\alpha_p = 0$; faisons

$$z = x + y\sqrt{-1} = r\left(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1}\right) ;$$

substituant dans l'équation $fz = 0$, et égalant à part les expressions réelles et les imaginaires, on a :

$$P = f(x, y) = r^n \cos n\varphi + \rho_1 r^{n-1} \cos[(n-1)\varphi + \alpha_1] +$$
$$+ \rho_2 r^{n-2} \cos[(n-2)\varphi + \alpha_2] + \text{etc.},$$
$$Q = F(x, y) = r^n \sin n\varphi + \rho_1 r^{n-1} \sin[(n-1)\varphi + \alpha_1] +$$
$$+ \rho^2 r^{n-2} \cos[(n-2)\varphi + \alpha^2] + \text{etc.},$$

faisant

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \ldots . + \rho_n = K.$$

Le cercle décrit d'un rayon plus grand que l'un des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$ satisfait au problème. En effet, marquons sur la circonférence les $4n$ points M_1, M_3, $M_5 \ldots .$ $M8n-1$ pour lesquels on a successivement :

$$n\varphi = \frac{\pi}{4},\ n\varphi = \frac{3\pi}{4},\ n\varphi = \frac{5\pi}{4} \ldots . n\varphi = 8n - 1 \,.\, \frac{\pi}{4};$$

Tous ces points sont différents, et l'on a toujours $\sin^2 n\varphi = \cos^2 n\varphi = \frac{1}{2}$; par conséquent (Probl. 28), en ces points P et Q ont même signe que leurs premiers termes, donc $\frac{P}{Q}$ a même signe que cot $n\varphi$; en M_1, ce signe est $+$; en M_3 ce signe est -1 ; en M_5, il est $+1$, et ainsi de suite ; et en M_{8n-1} il sera $+$. Lorsque $\sin^2\varphi < \frac{1}{2}$, alors $\cos^2\varphi > \frac{1}{2}$; donc, une au moins des fonctions est toujours de même signe que son premier terme ; or, de M_1 à M_3, de M_5 à M_7, de M_9 à M_{11}, etc., Q est de même signe que son premier terme et ne peut devenir nul, et, par conséquent, $\frac{P}{Q}$ ne peut devenir infini que dans les intervalles de M_3 à M_5, de M_7 à M_9, de M_{8n-1} à M_1 ; ainsi $\frac{P}{Q}$ devient $2n$ fois infini en passant de $-$ en $+$; c'est-à-dire l'excès est égal à $2n$; ainsi, comme dans le théorème de M. Cauchy, il y a donc n points-racines dans l'intérieur de la circonférence ; en d'autres termes l'équation $f(z) = 0$ a toujours n racines ; ce qu'il fallait démontrer.

Tm.