Nouvelles annales de mathématiques

E. Catalan

Lettre sur la sommation d'une série trigonométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 570-573

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__570_1>

LETTRE

Sur la sommation d'une série trigonométrique. (*V.* p. 519.)

Mon cher M. Terquem,

Le mémoire de M. Lecointe, contenu dans le dernier numéro de votre journal, renferme, il me semble, quelques inexactitudes. Permettez-moi, dans l'intérêt de la vérité *mathématique*, de les relever en peu de mots.

Je reproduis d'abord les paroles et les calculs de l'auteur :

« Maintenant si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
\sin a &= \ldots\ldots\ldots \sin a \\
\sin 2a &= \sin a \cos a + \sin a \cos a \\
\sin 3a &= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos a &= \ldots \cos a \\
\cos 2a &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\
\cos 3a &= \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= S.\cos a + (1 + C)\sin a, \\
C &= (1 + C)\cos a - S \sin a. \text{ »} \qquad \text{(p. 519)}
\end{aligned}$$

Cette dernière conclusion est fausse, attendu que si l'on ajoute les équations ci-dessus, la somme des premiers membres ne sera pas égale à la quantité multipliée par $\sin a$ ou par $\cos a$ dans la somme des seconds membres. Dira-t-on, conformément à la *métaphysique* introduite dans certains livres, *un terme de plus ou de moins* ne fait rien à l'affaire, c'est-à-dire à la somme? Cette mañière de raisonner est commode, elle abrége les discussions ; malheureusement, appliquée à la série infinie $1+2+4+8+\ldots$, elle donne, pour somme de cette série, la quantité $-\frac{1}{2}$!

Mais d'abord qu'appelle-t-on *somme* d'une série infinie. C'est probablement *la limite vers laquelle tend la somme*, S_n *des* n *premiers termes de cette série, lorsque le nombre entier* n *augmente indéfiniment*. Si donc il arrive que S_n augmente au delà de toute grandeur, ou que cette quantité, repassant périodiquement par les mêmes valeurs, n'ait pas de limite déterminée, la recherche que l'on se proposait n'a plus d'objet.

L'indétermination dont je parle existe dans les séries traitées par M. Lecointe. En effet, la somme S_n des quantités

$$\cos a,\quad \cos 2a,\quad \cos 3a,\quad \cos na,$$

a pour valeur :

$$\frac{\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\quad \text{(page 522)};$$

et il est évident que cette dernière expression ne tend pas vers une limite fixe, lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment. Si, par exemple, $a=\frac{\pi}{2}$, S_n prend successivement les valeurs

$$0,\quad -1,\quad -1,\quad 0.$$

Il est, du reste, évident *à priori*, qu'une somme de termes ne peut converger vers une limite fixe, si ces termes ne diminuent pas indéfiniment à partir de l'un d'eux. Or, pour une infinité de valeurs de n, la fonction $\cos na$ devient égale à ± 1, ou diffère très-peu de ces quantités ; donc il n'y a pas lieu à chercher la somme de la série *infinie*

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots$$

Les mêmes remarques s'appliquent aux autres séries infinies et périodiques.

Il y aurait encore bien des choses à dire sur ce sujet : mais cette lettre, qui ne devait contenir que peu de mots, est déjà fort longue ; permettez-moi donc d'en rester là pour cette fois.

Votre tout dévoué collaborateur.

E. CATALAN.

13 octobre 1844.

Note. La série trigonométrique dont il est ici question a déjà été le sujet d'une discussion entre quelques géomètres du dernier siècle, on peut consulter, à ce sujet, le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix, t. III, p. 159, 2e édition, Euler considère ces suites comme des séries récurrentes à échelle de relation binôme ; et l'on trouve facilement le développement

$$\frac{\cos a - x}{1 - 2x\cos a + x^2} = \cos a + x\cos 2a + x^2\cos 3a + x^3\cos 3a + \ldots$$

Pour que la série soit convergente, il faut que $x < 1$; mais Euler fait $x = 1$, alors on a le résultat fautif $-\frac{1}{2}$, que M. Catalan vient de signaler. Tm.