NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PRUDOT

Démonstration de la quadrature de l'hyperbole par la méthode des limites

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 565-570

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__565_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉMONSTRATION.

De la quadrature de l'hyperbole par la méthode des limites.

PAR H. PRUDOT,
professeur de mathématiques.

Lemme. Soient A, B, C des quantités constantes, et α, β des quantités qui peuvent devenir aussi petites que l'on veut; je dis que si l'égalité

$$(A-\alpha)^{B+\beta}=C, \qquad (1)$$

a toujours lieu, quelque petits que soient α et β, on a aussi

$$A^B=C$$

En effet, développant (1), il vient :

$$\left.\begin{array}{l}(A-\alpha)^{B+6}=A^{B+6}-(B+6)\alpha A^{B+6-1}+\dfrac{(B+6)(B+6-1)}{1.2}\alpha^2 A^{B+6-2}+\\ +\ldots\pm\dfrac{(B+6)(B+6-1)\ldots(B+6-n+1)}{1.2.3\ldots n}\alpha^n A^{B+6-n}+R_n,\end{array}\right\}$$

en nommant R_n le reste de la série. Or en prenant assez de termes, comme la série est convergente, R_n pourra devenir aussi petit que l'on voudra. D'un autre côté chacun des n termes renfermant α comme facteur, pourra aussi devenir plus petit que toute quantité donnée, et comme le degré de petitesse de α est indépendant du nombre n, on pourra toujours prendre α assez petit pour que la somme des n termes renfermant α soit aussi petite que l'on voudra. Donc la différence, le premier membre de (2) et le premier terme du deuxième membre, est une quantité variable à l'infini. En la représentant par δ on pourra poser

$$(A-\alpha)^{B+6}=A^{B+6}-\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$A^{B+6}-\delta=C, \quad \text{d'ou} \quad A^{B+6}-C=\delta. \qquad (3)$$

Cela posé, si A^B n'était pas égal a C on aurait

$$A^B-C=D,$$

D etant une quantite finie; mais on a evidemment $A^{B+6}>A^B$ d'où $A^{B+6}-C>A^B-C$, donc on aurait $A^{B+6}-C>D$, d'où à cause de (3),

$$\delta>D,$$

ce qui ne peut avoir lieu, puisque δ est variable à l'infini, et D constant, donc

$$A^B-C=D.$$

QUADRATURE DE L'HYPERBOLE.

Soit KEF (*fig.* 77) une hyperbole équilatère, rapportee à ses asymptotes, et ayant par conséquent pour équation

$$yx=1.$$

Prenons sur OX, OA $=1$ OB $=x$, divisons AB en un nombre quelconque de parties qui peuvent ne pas être égales, et construisons les rectangles indiqués par la figure. Il est évident d'abord que la différence entre la somme des rectangles extérieurs et l'aire hyperbolique EABI, peut devenir aussi petite que l'on veut en faisant croître successivement le nombre de ces rectangles; car la différence entre la somme des rectangles extérieurs et celle des rectangles intérieurs est égale à la somme des rectangles DMN, etc., lesquels ont pour expressions $(x'-1)(1-y')$, $(x''-x')(y'-y'')$, etc.,... soit $(y^{(p)}-y^{(p-1)})$, le plus grand des seconds facteurs de ces produits, la somme des rectangles EDMN, etc., sera plus petite que $(y^{(p)}-y^{(p-1)})[x'-1+x''-x'+x'''-x''+...+x-x^{(n-1)}]$, ou que $y^{(p)}-y^{(p-1)}(x-1)$, or le facteur $y^{(p)}-y^{(p-1)}$ peut devenir aussi petit qu'on le veut, tandis que le facteur $(x-1)$ est constant, donc la différence entre la somme des rectangles extérieurs et celle des rectangles intérieurs, décroît indéfiniment, donc à fortiori, etc...

Cela posé, si au lieu de prendre arbitrairement les points C, G, H, etc.; on les détermine de manière que les abscisses OA, OC, etc., soient en progression géométrique, ce qui se fera en intercalant un certain nombre de moyens géométriques entre 1 et x, ces abscisses pourront se représenter par

$$1,\quad x',\quad x'^2,\quad x'^3,\dots\quad x'^n,$$

en nommant x' la raison, et les ordonnées tirées de l'équation de la courbe, seront

$$1,\quad \frac{1}{x'},\quad \frac{1}{x'^2},\quad \frac{1}{x'^3},\dots\frac{1}{x'^n}.$$

Le premier rectangle extérieur sera alors exprimé par $(x'-1)\times 1 = x'-1$; le second aura pour valeur:

$(x'^2-x')\times\frac{1}{x'}=x'-1$; le 3^e^ sera $(x'^3-x'^2)\times\frac{1}{x'^2}=x'-1$, etc., c'est-à-dire qu'ils seront tous égaux à $x'-1$. Donc si on considère les sommes successives de rectangles terminés aux différentes abscisses, sommes que l'on obtiendra en prenant d'abord O, puis le premier rectangle, puis la somme des deux premiers, puis la somme des trois premiers, etc. Ces sommes formeront la progression arithmétique,

$$0,\quad x'-1,\quad 2(x'-1),\quad 3(x'-1),\quad n(x'-1).$$

Mais en intercalant assez de moyens géométriques entre 1 et x, on peut rendre la différence entre 1 et la raison x', aussi petite qu'on veut et en même temps, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, la différence entre l'aire hyperbolique EABI, et la somme de tous les rectangles extérieurs décroîtra indéfiniment. Si donc on représente par A l'aire hyperbolique, par S la somme des rectangles, et par z et α des quantités variables à l'infini, on pourra écrire.

$$x' = 1 + z,\qquad S = A + \alpha.$$

Cela posé, nous allonc démontrer que si on prend une abscisse quelconqne $OB = x$, il existe un nombre constant, c'est-à-dire indépendant de x, qui, élevé à une puissance égale à l'aire hyperbolique correspondante, reproduit l'abscisse proposée.

Pour cela cherchons le nombre qu'il faudrait élever à une puissance égale à $S = n(x'-1)$, pour reproduire l'abscisse correspondante $x = x'^n$. Si on nomme E ce nombre, il suffira de poser :

$$(1)\qquad E^S = x \text{ ou } E^{n(x'-1)} = x'^n \text{ d'où } E = x'^{\frac{1}{x'-1}},$$

ce qui donne en remplaçant x' par $1+z$:

$$E = (1+z)^{\frac{1}{z}}.$$

Le deuxième membre développé donne :

$$E = 1 + \frac{1}{z}z + \frac{1}{z} \times \frac{1-z}{2z}.z^2 + \frac{1}{z} \times \frac{1-z}{2z} \times \frac{1-2z}{3z}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{z}.\frac{1-z}{2z}.\frac{1-2z}{3z}\ldots\frac{1-(n-1)z}{nz}z^n =$$

$$=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2z}{3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-\frac{(n-1)z}{n}\right);$$

série convergente, car le rapport du $n^{ième}$ terme au précédent est $\frac{1-(n-1)z}{n}z=-\frac{(n-1)z-1}{n}z$, nombre plus petit que z, qui ici est supposé une fraction.

Cette série peut encore s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(2)\qquad E=\left[2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\right]+$$

une suite de termes tels que $-\frac{z}{2}-\frac{z}{2.3}-\frac{2.z}{2.3}+\frac{2z^2}{2.3},\ldots$ renfermant tous z comme facteur, et dont le nombre sera limité quand n le sera, $+R_n$, en représentant par R_n le reste de la série, lequel pourra devenir plus petit que toute quantité donnée, puisque la série est convergente.

La partie $2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+$ etc., est elle-même une autre série convergente dont la limite est généralement représentée par e, et si on nomme r_n le reste de cette série, r_n sera variable à l'infini. Or, si on ajoute et retranche r_n dans le deuxième membre de (2), il vient :

$$E=\left[2+\frac{1}{1.2}+\ldots\frac{1}{1.2\ldots n}\right]+r_n+$$
$$+\left[-\frac{z}{2}-\frac{1}{2.3}-\frac{2z}{2.3}+\frac{2z^3}{2.3}-\ldots\pm\frac{z^{n-1}}{n}\right]+R_n-r_n,$$

ou

$$E=e+\left[-\frac{z}{2}-\frac{z}{2.3}\ldots\pm\frac{z^{n-1}}{n}\right]+R_n-r_n;$$

or chacun des termes entre parenthèses renfermant z comme facteur pourra devenir plus petit que toute quantité donnée, et comme le degré de petitesse de z est indépendant du nombre de ces termes qui sera toujours limité pour une valeur déterminée de n, on pourra toujours, quel que soit n, prendre z assez petit pour que la somme des termes entre parenthèses soit aussi petite qu'on voudra. Quant à R_n et r_n, ce sont aussi des quantités variables à l'infini ; donc

$$e = \text{lim. de E}$$

quand on augmente indéfiniment le nombre des moyens géométriques intercalés entre 1 et x. Donc si on représente par β une quantité variable à l'infini, on pourra poser

$$E = e - \beta\,;$$

si on remplace maintenant dans (1), E par $e - \beta$, et S par $A + \alpha$, on aura :

$$(e - \beta)^{A+\alpha} = x.$$

Or e et A sont des constantes, tandis que β et α sont variables à l'infini ; donc, en vertu du lemme démontré plus haut,

$$e^{A} = x.$$

Donc il existe un nombre constant e, qui, élevé à une puissance égale à une aire hyperbolique quelconque, reproduit l'abscisse correspondante. C'est-à-dire que les aires hyperboliques sont les logarithmes Népériens des abscisses.