Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de MM. Sturm et Cauchy, déduits d'un seul principe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 555-565
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__555_1>

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

Suite, voir page 213

---

15. THÉORÈME VI. Si l'on désigne par e l'excès relatif à la fraction $\dfrac{xF'(x)}{F(x)}$ et pris entre les limites $-a$ et $+b$; soient de plus π le nombre des racines positives et ν le nombre des racines négatives de l'équation $F(x)=0$, comprises entre ces mêmes limites, on aura $e=\pi-\nu$, pourvu que le polynôme $F(x)$ ne soit pas divisible par x.

Démonstration. Décomposons e en deux parties, e' relatif aux racines négatives et e'' relatif aux racines positives de

$F(x) = 0$; on aura $e = e' + e''$. D'ailleurs $\frac{xF'x}{Fx}$ et $\frac{F'(x)}{Fx}$ sont de signe toujours opposé dans l'intervalle de $-a$ à 0, et de même signe dans l'intervalle de $+0$ à $+b$; donc (Prob. II) : $e' = -\nu$; $e'' = \varpi$; ainsi $\varpi - \nu = e$; et comme on sait calculer e, on connaît donc la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives d'une équation.

16. Lemme I. p étant une racine de $F'(x)$, $F(p)$ est un minimum ou un maximum absolu (abstraction faite du signe), selon que le produit $F(p)\,F''(p)$ est positif ou négatif.

La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

17. Problème (III). Étant donnée la fonction entière $F(x)$, trouver la différence entre le nombre des maxima et des minima absolus dont elle est susceptible. On suppose que ni $F(x)$ ni $F'(x)$ n'ont de racines égales.

Solution. Posons les deux équations :

$$F'(x) = 0\,, \quad y + F(x)\,F''(x) = 0\,,$$

soit $y = 0$ le résultat de l'élimination de x ; y ne peut avoir plus de valeurs que $F'(x)$ n'a de racines ; les valeurs positives de y correspondent à des maxima, et les valeurs négatives à des minima ; y est donc de même degré que $F'(x)$; d'après le théorème VI, on peut connaître la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation $y = 0$, et cette différence est égale à la différence cherchée (15).

18. Théorème VII. Le nombre de racines réelles distinctes d'une fonction algébrique entière, augmenté d'une unité, est toujours égal au nombre des maxima dont la fonction est susceptible, moins le nombre des minima.

Démonstration. Il suffit de construire la courbe parabolique représentée par l'équation $y = F(x)$, et de discuter les diverses formes de la courbe ; et le théorème devient d'une évidence intuitive. On peut aussi parvenir au même but d'une manière discursive et plus longue, par des considérations purement analytiques.

Remarque historique. A l'aide des théorèmes, lemmes et problèmes contenus dans les quatre paragraphes précédents, et qui appartiennent tous à M. Cauchy, on peut donc toujours trouver le nombre des racines réelles positives et négatives d'une équation. C'est ce que l'illustre analyste a fait connaître en 1815 (*). Il indique comment on peut remédier à la restriction que les racines égales ou nulles apportent à la méthode. Ainsi dès 1815 on possédait des moyens certains de déterminer le nombre de racines réelles, en considérant la succession de lignes de certaines fonctions, dont l'une était $\frac{F''x}{Fx}$; ce n'est qu'en 1829 que M. Sturm, au lieu de cette fonction, a pris celle-ci, $\frac{F'x}{Fx}$, et est parvenu au théorème d'une si admirable simplicité ; les procédés laborieux de M. Cauchy sont sans doute l'unique motif qui ont détourné l'attention que méritait un travail d'une si haute importance et qui, quinze après son apparition, était presque oublié. Nous reviendrons sur plusieurs autres théorèmes que contient ce beau mémoire ; on y trouve le germe de la proposition Sylvester que M. Sturm vient de démontrer. (Journal de Liouville, t. 5.)

Venons maintenant, comme s'exprime M. l'abbé Moigno, à l'une des plus belles conquêtes qu'on doit au génie de M. Cauchy. On sait que toute racine imaginaire est composée de deux parties reélles, mais dont la seconde est multipliée par $\sqrt{-1}$; M. Cauchy a découvert le moyen de déterminer

(*) Memoire sur la determination du nombre des racines réelles dans les equations algebriques. Journ. de l'Ecole polytechn., 17e cahier, p. 457, 1815.

les limites de ces parties réelles, à l'aide d'un magnifique théorème, généralisation d'un théorème semblable, qu'on doit à l'illustre analyste de Göttingue (*voir* t. 1, p. 443). MM. Sturm (Charles) et Liouville en ont les premiers donné une démonstration élémentaire ; mais nous prendrons celle que M. Cauchy a indiquée, en la faisant précéder de quelques éclaircissements à l'usage de nos jeunes lecteurs.

19. Soient $f(x,y)=0$ (1), $F(x,y)=0$ (2) et $z=\dfrac{f(x,y)}{F(x,y)}$ (3) les équations de deux lignes et d'une surface rapportées aux mêmes axes rectangulaires. Les deux premières fonctions étant algébriques et entières, les valeurs de z sont constamment réelles, et par conséquent ne peuvent changer de signe qu'en passant par zéro ou par l'infini ; pour tous les points de la ligne représentée par l'équation (1), les valeurs de z sont nulles, et pour les points de la ligne représentée par l'équation (2), ces valeurs sont infinies. Mais pour les points d'intersection de ces deux lignes, les valeurs de z sont $\frac{0}{0}$ ou indéterminées. C'est-à-dire que l'ordonnée z fait partie de la surface. De sorte que la surface cylindrique ayant pour directrice la ligne (2) et pour génératrice une droite parallèle à l'axe des z, sera asymptote à la surface (3), et les deux surfaces auront autant de droites en commun que les deux lignes (1) et (2) ont de points d'intersection, que nous désignons avec M. Prouhet (*voir* t. 1, p. 444) sous le nom de *points-racines*. Concevons qu'on trace sur le plan xy un contour *fermé* pouvant être une ligne continue ou composée de plusieurs lignes quelconques, mais avec la condition essentielle de ne pas passer par un des *points-racines*. Supposons que ce contour fermé, que nous désignons par C, renferme dans son intérieur un nombre m de points-racines. Si, en partant d'un point M de ce contour, on marche toujours dans le même sens, il est evi-

dent, le contour étant fermé, qu'on reviendra au même point M ; à chaque station correspond une valeur réelle de z, dans les passages par la ligne (1) ces valeurs sont nulles, et par la ligne (2) elles sont infinies. Ne considérons que ces derniers passages : un instant avant, et après, les valeurs de z présentent une variation, soit ascendante, soit descendante ; la différence entre le nombre des variations ascendantes et descendantes est ce que nous avons appelé l'*excès* E (p. 191). Lorsque les fonctions (1) et (2) sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, il n'y a aucune relation entre E et m ; mais si l'on établit une relation entre les deux fonctions, il s'ensuivra aussi quelque relation entre E et m ; or si l'on a cette relation :

$$f(x,y)+F(x,y)\sqrt{-1}=\varphi\left(x+y\sqrt{-1}\right),$$

φ désignant une fonction algébrique entière, alors $E=2m$. C'est là le théorème de M. Cauchy, qu'il nous reste à démontrer.

La relation entre les deux fonctions se décompose en ces deux équations :

$$f(x,y)=\varphi x-\varphi''x.\frac{y^2}{1.2}+\varphi^{\text{IV}}x.\frac{y^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

$$F(x,y)=\varphi'x.y-\varphi'''x.\frac{y^3}{1.2.3}+\varphi_{\text{V}}x.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.$$

Ainsi la fonction φ étant donnée, on voit comment on en déduit les fonctions f et F ; c'est une conséquence évidente du théorème de Taylor.

21. Lemme I. Considérons deux fonctions $f(s)$ et $F(s)$ de la variable s et continues entre les limites $s=s_0$ et $s=s_1$, on donne de plus les équations de condition

$$f(s_0)=f(s_1),$$
$$F(s_0)=F(s_1);$$

$\dfrac{f(s)}{\sqrt{(fs)^2+(Fs)^2}}$ et $\dfrac{Fs}{\sqrt{(fs)^2+(Fs)^2}}$ sont des fractions plus petites que l'unité et dont la somme des carrés est égale à l'unité, la première peut donc représenter le cosinus d'un arc, et la seconde le sinus; désignant le dénominateur pris positivement par r, on aura :

$$f(s) = r\cos p \quad \text{et} \quad F(s) = r\sin p\ ;$$

p est un arc, fonction de s, et fonction qu'on assujettit à la continuité. L'excès e de la fraction $\frac{F(s)}{f(s)}$, pris entre les limites s_0 et s_1, est égal à $\frac{p_1 - p_0}{\pi}$; p_1 et p_0 sont les valeurs de p aux deux limites.

Démonstration. $\frac{F(s_0)}{f(s_0)} = \tang p_0$, $\frac{F(s_1)}{f(s_1)} = \tang p_1$; ainsi, en vertu de l'équation de condition, $\tang p_0 = \tang p_1$; donc $p_1 - p_0 = n\pi$; n étant un nombre entier; si l'on fait croître insensiblement l'arc p depuis p_0 jusqu'à p_1, $p_1 - p_0$ sera égale à la somme de tous les accroissements; la tangente de cet arc pourra passer plusieurs fois par l'infini, de deux manières; du négatif au positif; alors l'arc passe brusquement de $-\frac{\pi}{2} - \delta$ à $\frac{\pi}{2} + \delta'$, δ et δ' sont des quantités infiniment petites; l'accroissement est donc $+\pi + \delta + \delta'$, quantité finie, et la fonction est discontinue; mais à $\tang\frac{\pi}{2} + \delta$ on peut substituer $\tang\frac{\pi}{2} + \delta - \pi$; alors l'accroissement devient $\delta - \delta'$, quantité infiniment petite, et la fonction reste continue. Ainsi toutes les fois que la tangente passe par l'infini, au moyen d'une variation ascendante, il faudra, pour empêcher les accroissements brusques de l'arc, retrancher π; et pour le même motif, il faudra ajouter π, lorsque la variation est descendante. Si nous appelons donc e' l'*excès* de la fonction fractionnaire $\frac{F(s)}{f(s)}$, on aura $p_{(1)} - p_{(0)} = -e'\pi$, mais $e' = -e$, donc $p_1 - p_{(0)} = e\pi$. C. Q. F. D.

Observation. Il est évident que le théorème subsiste si f est une fonction de plusieurs variables $x, y, z\ldots$, pourvu que chacune de ces variables soit une fonction continue de s.

22. Lemme II. Considérons deux fonctions fractionnaires $\frac{f(s)}{F(s)}$ et $\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ de la même variable s ; et ces fonctions sont soumises aux équations de condition du lemme précédent; soit

$f(s) = r\cos p$; $F(s) = r\sin p$; $\varphi(s) = r'\cos p'$; $\psi(s) = r'\sin p'$;

ou

$$f(s) + F(s)\sqrt{-1} = r\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$
$$\varphi(s) + \psi(s)\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p') ;$$

multipliant ensemble membre à membre les deux équations, il vient :

$$S + T\sqrt{-1} = rr'[\cos(p+p') + \sqrt{-1}\sin(p+p')],$$
$$S = f(s)\,\varphi(s) - F(s)\,\psi(s),$$
$$T = f(s)\,\psi(s) - F(s)\,\varphi(s).$$

Soit E, e, e' les excès relatifs aux fractions $\frac{S}{T}$, $\frac{fs}{F(s)}$, $\frac{\varphi(s)}{\psi s}$, on aura: $$E = e + e'.$$

Démonstration. $e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}$; $e' = \frac{p'_1 - p'_0}{\pi}$: mais $p + p$ est l'arc correspondant à $\frac{S}{T}$; donc ....

Corollaire. La même démonstration a lieu, quel que soit le nombre des fonctions fractionnaires.

23. Soit une courbe *fermée*, rapportée à des coordonnées polaires ; supposons d'abord le pôle dans l'intérieur de la courbe. Désignons par p_0 l'angle polaire d'un point M de la courbe. Si le point M mobile sur la courbe parcourt son contour dans le même sens, p_0 croîtra sans cesse ;

quand on sera revenu au même point M, quand on aura parcouru tout le contour, p_0 sera devenu

$$p_0 + 2\pi \; ; \text{ ou } p_1 = p_0 + 2\pi \; ; \; p_1 - p_0 = 2\pi.$$

Mais si le pôle est extérieur, le même mouvement du point M, après avoir fait croître p_0, le fera décroître de la même quantité ; de sorte que l'on aura, à la fin du mouvement $p_1 = p_0$ ou $p_1 - p_0 = 0$.

Observation. C'est ainsi qu'on explique, dans le système du monde, les rétrogradations apparentes des planètes.

24. *Théorème de M. Cauchy.* Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du degré n, qui, lorsqu'on change z en $x + y\sqrt{-1}$, devient $f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1}$: traçons dans le plan de x, y une courbe fermée dont la longueur du contour soit c, et dont les coordonnées x, y puissent être considérées comme des fonctions continues de l'arc s de cette courbe ; le nombre m des points dont les coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$ (points-racines) vérifient l'équation $f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1} = 0$ sera donné par l'équation $m = \frac{E}{2}$; E étant l'excès relatif à la fonction $\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$, et pris entre les limites $s = 0$, $s = c$.

Démonstration. Rapportons la courbe fermée à des coordonnées polaires, et choisissons pour pôle le *point-racine* dont les coordonnées soient $x = \alpha$, $y = \beta$; nous aurons $x - \alpha = r \cos p$ et $y - \beta = r \sin p$, r et p étant le rayon vecteur et l'angle polaire du point mobile M ; $x - \alpha$ et $y - \beta$ sont des fonctions continues de l'arc s ; donc aussi r et p ; et r est essentiellement positif.

Appelant e l'excès relatif à $\frac{x - \alpha}{y - \beta}$ ou $\tang p$ considérée comme fonction de s et pris entre les limites $s = 0$, $s = c$ on a, d'après le lemme I

$e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}$; si le pôle est intérieur, $p_1 - p_0 = 2\pi$,

si le pôle est extérieur, $p_1 - p_0 = 0$.

Donc $e = 2$ si le point-racine est intérieur, et $e = 0$ s'il est extérieur ; pour un autre point-racine ayant pour coordonnées α', β', on aura de même $e' = 2$ ou $e' = 0$, selon que le point-racine est au dedans ou au dehors de la courbe ; cet excès étant relatif à la fraction $\frac{x - \alpha'}{y - \beta'}$; et ainsi des autres points-racines.

Donc, en supposant qu'il n'y ait aucun point-racine sur la courbe, et qu'il y ait m points-racines dans l'intérieur, on aura

$$e + e' + e'' + \ldots. = 2m.$$

Or

$$Fz = \left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\left(z - \alpha' - \beta'\sqrt{-1}\right)\left(z - \alpha'' - \beta''\sqrt{-1}\right)\ldots =$$
$$= \left[\left(x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1}\right)\left(x - \alpha' + (y - \beta')\sqrt{-1}\right)\left(x - \alpha'' + (y - \beta'')\sqrt{-1}\right)\right]$$
$$= f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1} ;$$

donc, d'après le lemme précédent,

$$E = e + e' + e'' + \text{etc.} \ldots. = 2m.$$

C. Q. F. D.

Remarque I. Les ordonnées β, β', β'' .... peuvent être nulles ; alors les points-racines correspondent à des racines réelles.

Remarque II. Lorsque l'équation a des racines égales, il y a des points-racines qui coïncident ; ces points-racines sont multiples.

Remarque III. Le théorème a de même lieu pour les fonctions non entières ou transcendantes, pourvu qu'elles admettent la forme $\left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)$ et que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ne rende pas infini ou nul le quotient de la fonction par $\left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)^n$

Remarque IV. Les fonctions f et F auxquelles s'applique le théorème de M. Cauchy sont les équations (U) et (T) de M. Gauss (t. 1, p. 441), qui a montré aussi comment on trouve le nombre de *points-racines* renfermés dans un cercle de rayon quelconque décrit de l'origine comme centre. De sorte que le théorème de M. Cauchy n'est au fond, comme nous l'avons dit, qu'une généralisation du théorème de M. Gauss.

25. Problème. Étant donnée l'équation $F(z) = 0$, trouver combien elle a de racines imaginaires dont la partie réelle est renfermée entre les limites x_0, x_1, et dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est renfermée entre les limites y_0, y_1.

Solution (fig. 78). Soient les axes rectangulaires OX, OY; faisons $OM = x_0$; $ON = x_1$; $AM = y_0$; $DM = y_1$ et formons le rectangle ABCD.

Remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura :

$$F(z) = f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1};$$

la question est donc réduite à trouver le nombre des points-racines renfermés dans le contour ABCD; parcourons ce contour en allant de A vers B; s étant comme ci-dessus la longueur d'un arc de la ligne parcourue, on a pour la droite

			Limites.	*Excès.*
AB	$x = s$;	$y = y_0$;	$x_0 \ldots x_1$	E
BC	$y = s$;	$x = x_1$;	$y_0 \ldots y_1$	
CD	$x = s$;	$y = y_1$;	$x_1 \ldots x_0$	
DA	$y = s$;	$x = x_0$;	$y_1 \ldots y_0$	

Soit $\dfrac{f(x, y)}{F(x, y)} = \varphi(x, y)$; désignons par

E_{y_0} l'excès de la fonction $\varphi(x, y_0)$ entre les limites x_0, x_1;
E_{x_1} ..... $\varphi(x_0, y)$ .... y_0, y_1;
E'_{y_1} ..... $\varphi(x, y_1)$ ..... x_1, x_0
E'_{x_0} ..... $\varphi(x_0, y)$ ..... y_1, y_0.

d'où $$E = E_{y_0} + E_{x_1} + E'_{x_1} + E'_{x_0} = 2m.$$

Désignant par

E_{y_1} l'excès relatif à $\varphi(x, y_1)$ pris entre les limites x_0, x_1;
E_{x_0} ..... $\varphi(x_0, y)$ ..... y_0, y_1,

on aura $$E = E_{y_0} - E_{y_1} - [E_{x_0} - E_{x_1}];$$

car l'on a évidemment $E'_{y_1} = -E_{y_1}$. On calcule ensuite les quatre excès nécessaires pour trouver E d'après le problème (II, p. 192); et la moitié de E donne le nombre de points-racines qui se trouvent dans l'intérieur du rectangle.

Observation. Lorsque y_0 et y_1 sont de même signe, la partie comprise ne peut être nulle; donc, dans ce cas, le rectangle ne peut renfermer des racines réelles.

(*La fin prochainement.*)