NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Note sur les nombres parfaits

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 552-553

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__552_1>

NOTE

SUR LES NOMBRES PARFAITS.

(Voir page 218.)

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la faculte de Bordeaux.

La règle d'Euclide qui donne des nombres parfaits essentiellement pairs, les donne-t-elle tous? L'affirmative s'établit en deux mots; mais quant à cette autre question · y a-t-il des nombres parfaits impairs? elle reste pour moi tout à fait indécise ; j'ai bien démontré que xx, $x^{\alpha}y^{\beta}$, $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, ne sauraient être impairs et parfaits; le cas de $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}u^{\delta}$ et quelques autres s'établissent peut-être de la même manière; mais en laissant indéterminé le nombre des facteurs premiers impairs et différents x, y, z, u,... je ne puis établir qu'il n'y a point de nombres parfaits impairs. Les propriétés que vous énoncez relativement aux nombres parfaits, doivent donc être attribuées aux nombres parfaits pairs.

Legendre dit que $2^{31}-1$ (*Théorie des nombres*, t. I, p. 229, 1830), est le plus grand des nombres premiers vérifiés. D'après la table que vous avez donnée, $2^{41}-1$, $2^{47}-1$ seraient premiers, et l'assertion de Legendre inexacte, ce qui est fort possible.

Théorème. L'équation des nombres parfaits

$$2.x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots=(1+x+..+x^{\beta})(1+y+..+y^{\beta})(1+z+\ldots+z^{\gamma})\ldots \quad (1),$$

où $x, y, z,\ldots$ sont des nombres premiers différents, est possible quand $x=2$, ou pour les nombres pairs. L'équation devient alors

$$y^{\beta}z^{\gamma}\ldots+\frac{y^{\beta}z^{\gamma}\ldots}{2^{\alpha+1}-1}=(1+y+\ldots y^{\alpha})\,(1+z\ldots+z^{\gamma}),$$

dont l'impossibilité est manifeste, quand les exposants β, $\gamma\ldots$ sont autres que 1, 0, 0 ;... mais pour ce cas, on obtient la solution d'Euclide.

Problème. L'équation (1) est-elle toujours impossible, quand les nombres $x, y, z,\ldots$ sont impairs ?