Nouvelles annales de mathématiques

E. Prouhet

Note sur l'expression analytique de la plus courte distance d'un point à une droite ou d'un point à un plan

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 548-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__548_1>

NOTE

Sur l'expression analytique de la plus courte distance d'un point à une droite ou d'un point à un plan.

PAR M. E. PROUHET,
professeur au College royal d'Auch.

—

I.

Pour exprimer la plus courte distance d'un point à une droite en fonction des coordonnees du point et des coefficients de l'équation de la droite, on commence ordinairement par mener une perpendiculaire du point à la droite; on cherche ensuite les coordonnées du pied de la perpendiculaire, et il ne reste plus qu'à calculer la distance de deux points dont les coordonnées sont connues. Cette marche est très-naturelle; mais elle a l'inconvenient de conduire à de très-longs calculs, surtout quand les axes sont obliques. Le procédé que je vais exposer dans cette note conduit beaucoup plus rapidement au but, et en le généralisant il nous permettra d'obtenir la plus courte distance d'un point à un plan, dans le cas le plus général possible.

Soient :

D la droite donnée : $OA = a$, $OB = b$, ses coordonnées à l'origine ;

D' une parallèle à la droite D, menée par le point donné (x', y', z') ;

c le segment de la droite D intercepté entre les axes ;

h, h' les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les droites D, D' ;

δ la distance cherchée ;

φ l'angle des axes.

On aura évidemment :

$$\delta = h - h'.$$

Si on appelle m le rapport de similitude des deux triangles OAB, OA'B', on aura $h' = mh$: donc

$$\delta = (m - 1) h.$$

Pour avoir la valeur de h, je remarque que l'aire du triangle OAB est exprimée par $\frac{bc}{2}$, et aussi par $\frac{ab \sin \varphi}{2}$: donc

$$h = \frac{ab \sin \varphi}{c}.$$

Pour avoir la valeur de m, je remarque que l'équation de la droite D étant

$$ay + bx - ab = 0, \tag{1}$$

l'équation de la droite D' dont les coordonnées à l'origine sont ma, mb, doit être

$$ay + bx - mab = 0, \tag{2}$$

l'équation (2) devant être satisfaite, quand on fait $x=x'$, $y=y'$, on aura en faisant cette substitution et résolvant par rapport à m :

$$m=\frac{ay'+bx'}{ab}.$$

D'ailleurs, du triangle OAB, on tire : $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$; donc, en substituant dans la formule $\delta=(m-1)h$ ces valeurs que nous venons de trouver, nous aurons :

$$\delta=\frac{(ay'+bx'-ab)\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}.$$

Si l'équation était donnée sous la forme $Ay+Bx+C=0$, il suffirait de remplacer dans cette formule a, b, ab par les quantités A, B, —C qui leur sont proportionnelles, et on aurait :

$$\delta=\frac{(Ay'+Bx'+C)\sin\varphi}{\sqrt{A^2+B^2+2C\cos\varphi}}.$$

II

Proposons-nous maintenant de trouver la plus courte distance d'un point H à un plan donné P.

Soient :

$OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, les coordonnées à l'origine du plan donné P;

$OA'=ma$, $OB'=mb$, $OC'=mc$, celles d'un plan P' parallèle au plan P, et passant par le point donné $M(x', y', z')$;

s la portion du plan P interceptée entre les plans coordonnés;

h, h' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans P, P';

δ la distance cherchée;

α, β, γ les angles des axes.

On aura comme plus haut :

$$\delta = (m - 1)h.$$

La pyramide triangulaire OABC a pour mesure $\frac{1}{3}hs$ et aussi $\frac{1}{3}abc\mathrm{F}$, F désignant ici pour abréger la fonction

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Donc on aura :

$$h = \frac{abc\mathrm{F}}{s}.$$

L'équation du plan P′ dont les coordonnées à l'origine sont ma, mb, mc, est

$$bcx + acy + bcz - mabc = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$:

$$m = \frac{bcx' + acy' + bcz'}{abc};$$

donc on aura :

$$\delta = \frac{(bcx' + acy' + bcz' - abc)\mathrm{F}}{s}.$$

Pour résoudre complétement le problème, il reste à exprimer s en fonction des quantités a, b, c, α, β, γ. Si nous désignons par e, f, g les côtés de ce triangle respectivement opposés aux arêtes a, b, c, nous aurons d'après une formule connue :

$$16s^2 = 2f^2g^2 + 2e^2g^2 + 2e^2f^2 - e^4 - f^4 - g^4.$$

Mais on voit facilement que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\ f^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$g^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

En faisant la substitution et réduisant, on aura la formule symétrique :

$$4s^2 = \Sigma b^2c^2\sin^2\alpha - 2\Sigma a^2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma).$$

La valeur de δ sera donc

$$\delta = (bcx' + acy' + abz' - abc) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sqrt{\Sigma b^2c^2\sin^2\alpha - 2\Sigma a^2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}}.$$