NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CHEVILLARD

Problème de combinaison

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 537-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__537_0>

PROBLÈME DE COMBINAISON.

PAR A. CHEVILLARD,
professeur à Sorèze

—

Diverses personnes en nombre quelconque s'étant distribué différents objets connus, trouver à l'aide d'une seule donnée l'ordre de la distribution des objets.

I. $p+1$ personnes prennent $p+1$ objets connus dans un ordre inconnu, qu'on veut deviner. Pour cela, on donnera à la 1^{re} 1 jeton, à la 2^{me} 2 jetons, à la 3^{me} 3, à la 4^{me} 4,... à la $p+1^{me}$, $p+1$ jetons. Posant ensuite G jetons sur la table, vous ordonnerez qu'à votre insu la personne qui a le 1^{er} objet, prenne x fois autant de jetons qu'elle en a reçu, que celle qui a le 2^{me} objet, prenne y fois autant de jetons qu'elle en a reçu, 3^{me} objet z fois autant,... $p+1^{me}$ objet, v fois autant. Demandant ensuite combien il reste de jetons sur la table, il faut, à l'aide de la réponse, déterminer l'ordre de la distribution des $p+1$ objets.

Si la 1^{re} personne a pris le 1^{er} objet, la 2^{me} le 2^{me}, la 3^{me} le 3^{me}, etc., le nombre de jetons pris sur les G jetons, sera $x+2y+3z+\ldots+(p+1)v$; si la 2^{me} a pris le 1^{er}, la 1^{re}, le 2^{me}, la 3^{me} le 3^{me}, etc., le nombre de jetons pris sera $2x+y+3z+\ldots+(p+1)v$ et ainsi de suite, ce qui fait $1.2.3\ldots(p+1)$ permutations diverses suivant lesquelles les $p+1$ personnes peuvent se distribuer les $p+1$ objets. Si je parviens à déterminer $x, y, z,\ldots v$ de manière à ce que les $1.2.3\ldots(p+1)$ sommes enlevées soient toujours différentes, les restes qu'elles laisseront sur la table seront toujours différents, et l'on conçoit que la connaissance du reste pouvant amener celle de la permutation correspondante, précise ainsi l'ordre de la distribution. Et d'abord, les nombres x, y, z,... v doivent tous différer, car si l'on avait seulement $x=y$, les 2 permutations $x+2y+3z+...$ et $2x+y+3z+...$ répèteraient la même somme et causeraient incertitude sur 2 des $p+1$ objets distribués. Je supposerai donc $x, y, z,...$ croissants, savoir :

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x+l \\ z &= x+al \\ t &= x+bl \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ v &= x+il, \end{aligned}$$

x, l, a, b,... i étant des entiers quelconques, et a, b,... i croissants. Une permutation quelconque, par exemple $3x+2y+z+...+(p+1)v$ deviendra $x(3+2+1+...+p+1)$ $+l[(p+1)i+...+1.a+2]=\frac{(p+1)(p+2)}{2}x+l.N$, N étant un arrangement sommatoire formé en multipliant $i+...+b+a+1$ par P des $p+1$ nombres $1, 2, 3,... p+1$.

2. Pour que les permutations primitives diffèrent, il suffit que tous ces arrangements diffèrent : avec les $p+1$ nombres $1, 2, 3,... p+1$, on ne peut faire que $(p+1)p(p-1)...3.2$ arrangements divers de p d'entre eux, arrangements dont le nombre devait en effet équivaloir à celui des permutations primitives. Pour disposer ces arrangements sommatoires de manière à ce qu'ils forment des valeurs croissantes, il est clair qu'on doit commencer par la plus faible somme $1.i+2h+...+(p-2)b+(p-1)a+p$, et s'élever progressivement de manière à faire porter d'abord les plus faibles

multiplicateurs 1, 2,... sur les plus forts nombres i, h,.... D'après cela je placerai les $(p+1)p(p-1)\ldots 3.2$ arrangements en $p+1$ colonnes de $1.2.3\ldots p$ lignes horizontales chacune, chaque horizontale contenant p des $p+1$ nombres $1, 2, 3,\ldots p+1$. Ces $p+1$ colonnes où le nombre initial est le rang même de chacune ne formeront qu'une colonne générale commençant par les coefficients de la somme minima, et terminée par ceux de la somme maxima $p+1$, p, $p-1,\ldots$ 3, 2. Voici les lois de la composition de cette colonne :

i	h	g	.....	c	b	a	
J	I	H	.....	D	C	B	A
.	.	.		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	$p-2$	$p-1$	$p+1$
.	.	.		.	$p-2$	p	$p-1$
.	.	.		.	$p-2$	p	$p+1$
.	.	.		.	$p-2$	$p+1$	$p-1$
.	.	.			$p-2$	$p+1$	p
.	.	.		.	$p-1$	$p-2$	p
.	.	.		.	$p-1$	$p-2$	$p+1$
.	.	.		.	$p-1$	p	$p-2$
.	.	.		.	$p-1$	p	$p+1$
.	.	.		.	$p-1$	$p+1$	$p-2$
.	.	.		.	$p-1$	$p+1$	p
.	.	.		.	p	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	p	$p-2$	$p+1$
.	.	.		.	p	$p-1$	$p-2$
.	.	.		.	p	$p-1$	$p+1$
.	.	.		.	p	$p+1$	$p-2$
.	.	.		.	p	$p+1$	$p-1$
.	.	.		.	$p+1$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	$p+1$	$p-2$	p
.	.	.		.	$p+1$	$p-1$	$p-2$
.		.		.	$p+1$	$p-1$	p
.	.	.		.	$p+1$	p	$p-2$
.	.	.		$p-3$	$p+1$	p	$p-1$
.	.	.		$p-2$	$p-3$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		$p-1$	$p+1$	p	$p-2$
.	.	.		p	$p-3$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
1	$p+1$	p	.....	6	5	4	3
2	1	3		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
2	$p+1$	p		6	5	4	3
3	1	2		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
3	$p+1$	p		6	5	4	2
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
	.	.		.	.	.	.
.	.			.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
$p+1$	1	2		$p-4$	$p-3$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
$p+1$	p	$p-1$		5	4	3	2

La 1^{re} verticale se compose de $p+1$ périodes de $1.2.3\ldots p$ nombres égaux successifs. La 2^{me} verticale se compose de $(p+1)p$ périodes de $1.2.3\ldots(p-1)$ nombres égaux. La 3^{me} verticale comporte $(p+1)p\,(p-1)$ périodes. *La* $\nu^{\text{ième}}$ *verticale comprend* $(p+1)\,p\,(p-1)\ldots(p-\nu+2)$ *périodes chacune de* $1.2.3\ldots(p-\nu+1)$ *nombres égaux.* Ainsi la $(p-1)^{\text{ième}}$ verticale comprend $(p+1)p(p-1)\ldots4.3$ périodes de 2 nombres égaux, la $p^{\text{ième}}$ verticale contient $(p+1)\,p\,(p-1)\ldots4.3.2$ nombres non périodiques.

La loi fondamentale à l'aide de laquelle on peut écrire tous les nombres de la colonne générale consiste en ce que *les nombres qui manquent horizontalement jusqu'au* 1^{er} *nombre d'une période quelconque de la* $\nu^{\text{ième}}$ *verticale sont ceux qui doivent former par ordre de croissance les* $p-\nu+1$ *périodes de la* $\nu+1^{\text{ième}}$ *verticale en regard de la période considérée.* Ainsi pour écrire les nombres de la $p-1^{\text{me}}$ verticale, en regard de la 2^{me} période de la $p-2^{\text{me}}$ verticale, comme la ligne horizontale qui commence cette période est $1, 2, 3, \ldots p-3, p-1$, j'écrirai 3 périodes formées avec les nombres manquants successifs $p-2, p, p+1$.

Dans toute verticale d'une des $p+1$ colonnes partielles se trouvent tous les nombres $1, 2, \ldots p+1$, excepté celui qui marque le rang de cette colonne qui ne se trouve qu'à la 1^{re} verticale. Si l'on observe dans une verticale les nombres croissants d'une suite de périodes, ce sont les mêmes qui composent dans un autre ordre la même portion de la verticale suivante. Ainsi dans la $p-1^{\text{me}}$ verticale, la 2^{me} suite de périodes croissantes est $p-2, p, p+1$, et ce sont les seuls nombres qui composent la même portion de la $p^{\text{ième}}$ verticale. Une correspondance remarquable des suites de périodes croissantes dans 2 verticales successives consiste en ce que la 1^{re} suite de périodes croissantes de la $\nu^{\text{ième}}$ verticale étant épuisée, la 2^{me} suite commence avec le renouvellement de la 1re suite croissante de la $\nu+1^{me}$ verticale et de tous les termes qui prolongent cette suite dans les verticales suivantes; la 3^{me} suite commence avec le renouvellement de la 2^{me} suite de la $\nu+1^{me}$ verticale, et de tous les termes qui la prolongent à droite, et ainsi de suite.

La loi fondamentale de croissance des périodes verticales, permet de calculer facilement telle ligne horizontale qu'on voudra de la colonne générale. Soit à former la 422^{me} horizontale par exemple, on divisera successivement 422 par 1.2, 1.2.3,... jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'entier au quotient, ce qui donnera les quotients et les restes ci-dessous.

	422		
2	211	reste 0	$p-1$
2.3	70	2	$p-2$
2.3.4	17	14	$p-3$
2.3.4.5	3	62	$p-4$
2.3.4.5.6	0	422	$p-5$

$p-5$	$p-4$	$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	$p-3$	.	.	.	.
.	$p-2$	.	.	.	.
	$p-1$	$p-4$	.	.	.
		$p-3$	.	.	.
		$p-2$	$p-4$	.	.
			$p-3$		
			p	$p-4$	$p+1$

422e horizontale.

$$\ldots . p-6 \quad p-5 \quad p-1 \quad p-2 \quad p \quad p-4 \quad p+1$$

Puis observant que les verticales $p^{ième}$, $p-1^{me}$, $p-2^{me}$,.. commencent par des périodes de 1, $1.2=2$, $1.2.3=6$, $1.2.3.4=24$, 120, 720,... termes, on en conclura que la 422^{me} horizontale commence par le 422^{me} nombre de la période initiale $p-5$ de la $p-5^{me}$ verticale, et que pour les verticales $p-4^{me}$, $p-3^{me}$, $p-2^{me}$, $p-1^{me}$, p^{me}, cette horizontale se continue dans les périodes 4^{me}, 18^{me}, 71^{me}, 211^{me}, 422^{me}. Pour trouver les chiffres de ces périodes, on observera que la période $p-5$ comprend 6 périodes de la droite, $p-4$. 5.

$p-3$, 4; et $p-1$, 2. Si donc pour faciliter l'application de la loi de croissance, on représente les périodes croissantes, chacune par un terme, la suite initiale de la $p-4^{me}$ verticale sera

$$\begin{array}{ll} p-5, & p-4, \\ \vdots & p-3, \\ \vdots & p-2, \\ \vdots & p-1; \end{array}$$

et comme c'est par la 4^{me} que passe l'horizontale cherchée, on arrêtera cette suite à $p-1$. Les 3 premières périodes de la $p-4^{me}$ verticale, en font 5×3 ou 15 de la $p-3^{me}$, formant par la loi de croissance les périodes de la $p-3^{me}$ verticale en regard de la période $p-1$ dans la $p-4^{me}$ verticale, comme il en faut 18 on s'arrêtera à $p-2$. Les 17 premières périodes de la $p-3^{me}$ verticale en font $4\times 17=68$ de la $p-2^{me}$. Formant les périodes de la $p-2^{me}$ verticale en regard de la période $p-2$ dans la $p-3^{me}$ verticale; comme il en faut 71, on s'arrêtera à p. Les 70 premières périodes de la $p-2^{me}$ verticale en font 210 de la $p-1^{me}$; ce qui donne $p-4$ pour la 211^{me}, et comme c'est le dernier terme d'une période de la $p-1^{me}$, on doit terminer par le plus haut terme manquant $p+1$. Ces calculs se rangent commodément comme ci-contre, et l'on a ainsi très-rapidement la 422^{me} horizontale ....$p-6$, $p-5$, $p-1$, $p-2$, p, $p-4$, $p+1$.

3. Passons à la recherche des conditions de croissance de l'arrangement variable $Ji+Ih+Hg+\ldots+Dc+Cb+Ba+A$, depuis la somme minima en tête de la colonne générale jusqu'à la somme maxima $(p+1)i+ph+(p-1)g+\ldots+4b+3a+2$, qui la termine et qui fournit évidemment le minimum de jetons à poser sur la table, savoir

$$G=\frac{(p+1)(p+2)x}{2}+l[(p+1)i+ph+(p-1)g+\ldots+3a+2].$$

Les dispositions déjà prises pour la croissance des sommes étant favorables le plus possible, il suffit pour que cette croissance soit assurée qu'on ait constamment

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ji + Ih + Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A \\ \quad < J'i + I'h + H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A', \end{array} \right.$$

J', I', H',... désignant les nombres qui dans la colonne générale sont placés au-dessous de J, I, H... Pour que cette relation subsiste toujours, il faut que les diverses oppositions que peut y apporter la variation des coefficients A, B,... A', B',... y soient toujours annulées par les valeurs des constantes a, b, c,... i. Or, d'après l'organisation de la colonne générale des arrangements, les deux sommes successives de la relation (1) ne peuvent se trouver placées que dans les circonstances suivantes dont chacune est supposée exclure les précédentes :

1° B et B' périodiques ; d'où

$B = B'$ (*), $C = C'$, $D = D'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$;

2° C et C' périodiques ; d'où

$C = C'$, $D = D'$, $E = E'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$,

transition de période dans la $p-1^{me}$ verticale ;

3° D et D' périodiques ; d'où

$D = D'$, $E = E'$, $F = F'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$,

transition de période dans la $p-2^{me}$ verticale

. . . .

. . . .

$(p-3)^{\circ}$ H et H' périodiques ; d'où $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$, transition de période dans la 4^{me} verticale ;

(*) La réciproque n'est pas vraie, car on peut avoir $B = B'$ sans que ces coefficients forment période, de même que $A = A'$ sans qu'il y ait aucune période dans la verticale A. Même observation pour les hypothèses suivantes.

$(p-2)^{\circ}$ I et I′ périodiques ; d'où $I = I'$, $J = J'$, transition dans la 3e verticale ;

$(p-1)^{\circ}$ J et J′ périodiques ; d'où $J = J'$, transition dans la 2e verticale ;

p° $J < J'$, transition dans la 1re verticale ou passage d'une colonne partielle à la suivante.

Dans l'hypothèse 1°, la relation (1) se réduit à $A < A'$, et d'après la loi de croissance (2), elle est toujours satisfaite ; mais dans les hypothèses suivantes cette relation ne peut subsister que pour les valeurs attribuées aux nombres a, b, c,... et comme elle devient successivement, par les hypothèses,

$$Ba + A < B'a + A',$$
$$Cb + Ba + A < C'b + B'a + A',$$
$$Dc + Cb + Ba + A < D'c + C'b + B'a + A',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A < H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A',$$
$$Ih + Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A < I'h + H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A',$$
$$Ji + Ih + \ldots + Ba + A < J'i + I'h + \ldots + B'a + A',$$

on trouve alors que a, b, c,... doivent satisfaire aux relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a > \dfrac{A - A'}{B' - B},\quad b > \dfrac{Ba + A - B'a - A'}{C' - C}, \\ c > \dfrac{Cb + Ba + A - C'b - B'a - A'}{D' - D}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i > \dfrac{Ih + Hg + \ldots + Ba + A - I'h - H'g - \ldots - B'a - A'}{J' - J}. \end{array}\right.$$

Les dénominateurs de ces fractions sont toujours positifs, parce qu'ils commencent la transition de 2 périodes dans une suite de périodes croissantes. Quant aux numérateurs, ils le sont toujours aussi, mais il est inutile de le prouver, parce que la supposition qu'ils soient positifs est précisément la seule défavorable à l'existence de la relation (1). Par exemple, dans le cas de D et D' périodiques, la relation (1) se réduit à $Cb+Ba+A<C'b+B'a+A'$: on a nécessairement $C<C'$, et cette réduction de la relation (1) ne nécessite une détermination pour b que si l'on a $B+A>B'+A'$; autrement, cette réduction serait identiquement satisfaite, quels que fussent b, a.

4. On déterminera facilement des limites inférieures pour les nombres a, b, c,... si l'on observe que les nombres de toute horizontale devant tous différer et être choisis parmi $p+1, p, p-1,\ldots 3, 2, 1$, il suffira de remplacer dans les numérateurs les termes positifs par les plus hauts maxima décroissants, les termes négatifs par les plus faibles minima croissants et les dénominateurs par leurs minima qui ne pouvant être 0 se réduisent à 1. Par exemple, pour déterminer la limite de C, les maxima décroissants de C, B, A étant $p+1$, p, $p-1$ et les minima croissants de C', B', A' étant 1, 2, 3, on aura donc :

$$c>(p+1)b+pa+p-1-b-2a-3=pb+(p-2)a+p-4.$$

C'est ainsi que les relations (2) donnent :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{c} a>p,\ b>pa+p-2,\ c>pb+(p-2)a+p-4, \\ d>pc+(p-2)b+(p-4)a+p-6, \\ e>pd+(p-2)c+(p-4)b+(p-6)a+p-8, \text{etc.}\end{array}\right.$$

ce qui donne une loi de formation très-simple pour les limites inférieures. Si $p=2$, a est la seule constante ; si $p=3$, a et b sont les seules constantes. Pour $p=p$, il y a $p-1$ constantes. Les relations (3) montrent que si p croît, les derniers termes des seconds membres deviennent de plus en plus négatifs, ce qui arrive dès que $p>4$. Cela tient à ce que les nombres les plus élevés i, h,... correspondent dans la colonne générale à d'autant plus de périodes que p est plus grand, et ont, par conséquent, besoin d'une augmentation moins rapide pour la croissance des sommes horizontales. Ainsi, on posera :

$$a=p+1,\ b=pa+p-1,\quad c=pb+(p-2)\,a+p-3,$$
$$d=pc+(p-2)\,b+(p-4)\,a+p-5,\ \text{etc.},$$

et il sera plus commode dans la pratique de calculer a, b, c,... en fonctions successives les uns des autres qu'en fonction de p. Le minimum de jetons à poser sur la table sera connu

$$G=\frac{(p+1)\,(p+2)}{2}+l\,[2+3\,a+4b+\ldots+(p+1)\,i],\ x=1,$$

et pour résoudre entièremement la question, il ne reste qu'à expliquer comment la connaissance du nombre de jetons laissés sur la table fera trouver l'ordre de la distribution des $p+1$ objets, car x, y, z,... v sont maintenant connus. Supposons qu'il reste M jetons, on aura donc :

$$G-M=\frac{(p+1)\,(p+2)}{2}+l\ (A+Ba+Cb+Dc+\ldots),$$

ce qui se réduit à $A+Ba+Cb+Dc+\ldots=T$, où a, b, c,... sont des entiers connus, $l=1$. Cette équation doit être résolue en nombres entiers positifs pour A, B, C, D,... et l'on sait par les discussions précédentes qu'il n'y a qu'un seul système de p nombres choisis parmi 1, 2, 3,...$p+1$ qui y satisfasse. On emploiera donc les méthodes connues de l'analyse indéterminée du premier degré par suite desquelles B, C, D... seront calculés en fonction de plusieurs indéterminées dont A fera partie. Examinant chacun des systèmes $A=1$, $A=2$, $A=3$,... $A=p+1$, et limitant à chaque fois les valeurs de B, C, D,... par les relations $0<B<p+1$, $0<C<p+1$, etc., on trouvera définitivement A, B, C, D,... Si maintenant on se reporte à la notation $A+Ba+Cb+Dc+\ldots$, on se rappellera que celui des $p+1$ nombres qui est omis parmi A, B, C, D,... provient du rang de l'objet pris par la première personne

Personnes	$p+1$,	p,	$p-1$,	. . . .	5,	4,	3,	2,	1,
Objets	J,	I,	H,		D,	C,	B,	A,	

Ecrivant donc sur deux horizontales les nombres $p+1$, p, $p-1$ ... 3, 2, 1 et J, I ... B, A, on dira que la 2me personne a pris le Ame objet, la 3me le Bme, la 4me le Cme, etc., la 1re l'objet non encore nommé. On peut d'ailleurs éviter le calcul de l'équation qui doit fournir A, B, C, D,... en dressant pour les cas numériques dont on veut faire l'épreuve une table des arrangements correspondants à chaque reste, ou même, si p est fort petit, en composant une phrase mnémonique faisant l'office de cette table. (*Arithmétique de Reynaud*, page 309, 23e édition.)