NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Note sur la construction des racines de l'équation complète du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 533-536

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__533_1>

NOTE

sur la construction des racines de l'équation complète du quatrième degré.

Dans les Traités d'application de l'algèbre à la géométrie, on indique le moyen de construire les racines d'une équation à une seule inconnue, $f(x) = 0$, par l'intersection de deux lignes dont les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, conduisent à la proposée, $f(x) = 0$, par l'élimination de l'inconnue y. On a soin de faire observer que le choix des équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, peut être fait d'une infinité de manières différentes : la condition essentielle consistant en ce que l'élimination de y donne pour résultat $f(x) = 0$, ou bien une équation qui contienne toutes les racines réelles de $f(x) = 0$. A cela, j'ajouterai une observation qui, sans doute, a paru trop simple aux auteurs des

Traités où elle ne se trouve pas : c'est qu'il faut encore choisir les équations $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$, de manière que les lignes représentées par ces équations aient autant de points communs que la proposée $f(x)=0$ a de racines réelles; et cette condition est loin d'être remplie par tous les systèmes $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x, y)=0$, qui donnent $f(x)=0$ en éliminant y, puisqu'il est facile de former une équation $f(x)=0$, dont toutes les racines soient réelles, et qui s'obtienne en éliminant y de deux autres $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x,y)=0$, représentant des courbes dont le nombre des points communs soit inférieur au degré de la proposée. Ainsi, par exemple, l'équation $x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$ a pour racines $1, -1, 2, 2$, et elle résulte immédiatement de $x^4-4x^3=3y^2+1$, $3y^2+3x^2+4x-3=0$, par l'élimination de y. Or, les lignes que représentent ces deux dernières équations n'ont aucun point commun du côté des abscisses positives, car les abscisses positives des points de la première sont toujours plus grandes que le nombre 4, et ces valeurs, substituées à x dans la seconde, donnent pour l'ordonnée y des valeurs imaginaires (*).

Je ne me propose pas de présenter ici une discussion complète du moyen de construire les racines des équations de tous les degrés; je m'occuperai seulement de l'équation du quatrième degré : $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$. On peut construire ses racines, d'une infinité de manières différentes, par l'intersection de deux courbes du second degré : afin que ces courbes aient autant de points communs que l'équation proposée a de racines réelles, il suffit de choisir pour l'une des deux équations auxiliaires une équation du premier degré en y, par exemple $x^2=y$; la seconde sera $y^2+Axy+By+Cx+D=0$. A chaque racine réelle α de la proposée, correspondra un point commun aux deux courbes, dont les coordonnées seront : $x=\alpha, y=\alpha^2$. En effet, ce point est évidemment sur la parabole $x^2=y$, et il ap-

(*) Les deux courbes ont d'ailleurs deux points communs correspondants à une abscisse négative égale à -1.

partient aussi à l'hyperbole $y^2+Axy+By+Cx+D=0$; car en substituant α et α^2 à x et y dans cette dernière équation, on parvient à l'égalité $\alpha^4+A\alpha^3+B\alpha^2+C\alpha+D=0$, qui a lieu par hypothèse.

On peut aussi construire les racines réelles de l'équation (1)..... $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ par l'intersection d'une circonférence et d'une parabole. Les équations de ces deux courbes s'obtiennent facilement au moyen du calcul suivant.

Posons $x^2=y-\frac{Ax}{2}$... (2), il en résultera $x^2+Ax=y+\frac{A}{2}x$, et $x^4+Ax^3=y^2-\frac{A^2}{4}x^2$. Par suite l'équation (1) devient $y^2+\left(B-\frac{A^2}{4}\right)x^2+Cx+D=0$... (3). On aura toutes les racines réelles de la proposée en déterminant les abscisses des points communs aux courbes représentées par les équations (2) et (3), puisque l'une d'elles est du premier degré en y. Actuellement, je multiplie l'équation (2) par $1-B+\frac{A^2}{4}$, et je l'ajoute, membre à membre, à l'équation (3), il viendra :

$$y^2+x^2+\left[C+\frac{A}{2}+\frac{A^3}{8}-\frac{AB}{2}\right]x-\left[1+\frac{A^2}{4}-B\right]y+D=0\ (4).$$

Les axes des coordonnées étant supposés rectangulaires, l'équation (4) représente une circonférence dont les points communs avec la parabole (2) ont pour abscisses les racines réelles de l'équation proposée.

Je reprends, comme exemple, l'équation $x^4-4x^3+3x^2+$ $+4x-4=0$. Le coefficient du second terme étant -4, je pose $x^2=y+2x$, d'où $x^2-4x=y-2x$ et $x^4-4x^3=y^2-4x^2$. En substituant y^2-4x^2 à x^4-4x^3, l'équation donnée devient $y^2-x^2+4x-4=0$; je multiplie par 2 l'équation $x^2=y+2x$, et je l'ajoute membre à membre à $y^2-x^2+4x-4=0$, il en résulte $y^2+x^2-2y-4=0$, ou $x^2+(y-1)^2=5$. Ainsi, on obtiendra toutes les racines réelles de l'équation donnée en construisant les abscisses des points communs à la circonférence $x^2+(y-1)^2=5$ et à la parabole $x^2=y+2x$. C'est, au reste, ce qu'il est facile de vérifier.

En effet, la parabole $x^2 = y + 2x$ a pour axe une droite AB parallèle à l'axe des ordonnées OY, et située à une distance OB de OY, égale à l'unité ; le sommet de la courbe est un point A de la droite AB, à une distance égale à -1 de l'axe OX des abscisses ; enfin cette parabole passe par l'origine O des coordonnées et coupe l'axe des x en un second point C, dont la distance à l'origine est égale au nombre 2.

La circonférence $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ a son centre sur l'axe des y en un point D, à une distance OD de l'origine égale à 1 ; le carré de son rayon est 5. Or, $OD = 1$, $CO = 2$ donnent $\overline{DC}^2 = 5$; donc la circonférence contient le point C, et l'on voit déjà que l'un des points communs, C, aux deux courbes a pour abscisse le nombre 2 ; d'ailleurs, les coordonnées du centre D de la circonférence étant $x = 0$, $y = 1$ et celles du sommet de la parabole : $y = -1$, $x = 1$, la distance DA est égale à $\sqrt{5}$. Ainsi le sommet de la parabole est sur la circonférence, et par conséquent l'abscisse du second point commun aux deux courbes est l'unité. De plus, prolongez la droite AD d'une longueur $DG = AD$, de l'autre côté de l'axe des y : le point G appartiendra évidemment à la circonférence, et il sera aussi sur la parabole, car l'axe des y est le diamètre de la parabole qui divise en parties égales les cordes parallèles à AD ; donc les deux courbes se coupent en un troisième point dont l'abscisse est -1. Enfin, si par le point C on mène une tangente à la parabole, elle touchera aussi la circonférence : car nommons L, M les points auxquels cette droite coupe l'axe AB de la parabole et l'axe des y qui lui est parallèle, on aura, d'après une propriété connue, $AL = AB = 1$, d'où $LB = 2$, $MO = 4$, et comme, d'ailleurs, $CO = 2$ et $OD = 1$, la droite CO sera moyenne géométrique entre MO et OD. Donc CM est perpendiculaire sur CD, c'est-à-dire que CL est tangente à la circonférence. Alors, les deux courbes doivent être considérées comme ayant en C deux points communs dont l'abscisse est le nombre 2 ; et l'on trouve, de cette manière, par une construction géométrique, les valeurs des quatre racines de l'équation proposée. G.