NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EMILE-LOUIS ROGER

Grand concours (année 1843). Exposer d'une manière concise la théorie des racines égales et la méthode qu'on en tire pour mener les tangentes aux courbes algébriques. Prix d'honneur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 51-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__51_1>

GRAND CONCOURS. (Année 1843.)

Exposer d'une manière concise la théorie des racines égales et la méthode qu'on en tire pour mener les tangentes aux courbes algébriques.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. ROGER (ÉMILE-LOUIS),

né le 29 avril 1825 à Nîmes (Gard). Institution de M. *de Reusse*.
Collége royal Saint-Louis, professeur M. *Vincent*.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie des racines égales.

Soient a, b, c... les racines d'une équation algébrique

$f(x)=0$: on sait que $f(x)$ sera le produit des facteurs binômes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$...; en sorte que l'on aura

$$f(x)=\mathrm{N}(x-a)(x-b)(x-c)...,$$

(N étant le coefficient du premier terme de cette équation). Il peut arriver que les racines a, b, c... ne soient pas toutes différentes entre elles; ainsi la racine a pourra se trouver répétée n fois, la racine b, p fois... : on dit alors que $f(x)$ admet n racines égales à a, p racines égales à b...; et on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=\mathrm{N}(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q...,$$

expression qui s'applique aussi en particulier au cas des racines simples, en faisant $n=1$, $p=1$, etc.

Cela posé, l'objet de la théorie qui nous occupe consiste principalement à ramener une équation qui admet des racines égales, à un système d'équations tel que chacune d'elles n'admette plus que des racines simples, et que, en supposant le système résolu, on puisse en conclure les racines de l'équation proposée, chacune avec leur *degré de multiplicité.*

Ainsi, soit X_1 le produit des facteurs simples de $f(x)$ ou X, X_2 le produit des facteurs doubles, mais élevés chacun à la première puissance, X_3 le produit des facteurs triples, mais élevés chacun à la première puissance...; alors on aura

$$\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^2\mathrm{X}_3^3\mathrm{X}_4^4...$$

Il s'agit d'obtenir isolément chacun des facteurs X_1, X_2...

Première méthode. Cette méthode découle naturellement de la forme de l'équation

$$f(x)=\mathrm{N}(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q...$$

On voit en effet que si $f(x)$ admet une racine a au degré n de multiplicité, ce polynôme devra être exactement divisible par $(x-a)^n$. D'après cela, pour découvrir cette racine, il faudra effectuer la division de $f(x)$ par $(x-a)^n$, comme si a était connu ; on écrira ensuite que le reste de la division est identiquement nul. Comme ce reste sera ordinairement du degré $(n-1)$ en x, on obtiendra ainsi n équations de condition entre a et les coefficients de l'équation proposée. Soient

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0...,$$

ces équations de condition ; toute valeur de a qui annulera à la fois tous ces polynômes sera *au moins* n *fois* racine dans $f(x)$. Il faudra donc chercher les solutions communes aux polynômes A, B, C..., considérés comme fonctions de a ; le plus grand commun diviseur D entre tous ces polynômes contiendra toutes les racines qui entrent dans $f(x)$ au degré n de multiplicité, *ou à un degré supérieur.*

Cette dernière indétermination vient compliquer la méthode, qui paraît au premier abord si naturelle; mais on peut y remédier. En effet, si l'on a pour le polynôme proposé

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 X_5^5...,$$

et que l'on cherche d'abord les racines doubles, en divisant X par un facteur de la forme $(x-a)^2$, et que l'on détermine le plus grand commun diviseur entre les équations de condition ainsi trouvées, on aura évidemment, en appelant D_2 ce plus grand commun diviseur,

$$D_2 = X_2 X_3 X_4^2 X_5^2 X_6^3... ;$$

car un facteur tel que $(x-a)^5$ pourra être considéré comme donnant $(x-a)^2(x-a)^2(x-a)$. De même, si l'on cherche le plus grand commun diviseur qui correspond aux racines triples, on doit trouver

$$D_3 = X_3 X_4 X_5 X_6^2..., \text{ etc.}$$

Or, au moyen des polynômes D_2 et D_3, on peut isoler le facteur X_2. En effet, X_2 est le produit des facteurs étrangers aux deux polynômes D_2 et D_3, et voici comment on peut l'obtenir.

Soit δ le plus grand commun diviseur que l'on peut chercher entre D_2 et D_3 ; divisons D_2 par δ, et soit D_2' le quotient ; on a alors

$$D_2 = D_2'\,\delta.$$

Cherchons de même le plus grand commun diviseur entre D_2' et D_3. Soit δ' ce plus grand commun diviseur : on aura de même en divisant D_2' par δ'

$$D_2' = D_2''\,\delta'$$
$$D_2'' = D_2'''\,\delta'',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un plus grand commun diviseur égal à l'unité, ce qui arrivera certainement, attendu que les degrés D_2' et D_2'' vont en diminuant au moins d'une unité à chaque opération :

$$D_2^{n-1} = D_2^{n}\,\delta^{n-1}$$
$$D_2^{n} = D_2^{n}.1$$

Multipliant ensemble toutes ces égalités, on en déduit

$$D_2 = D_2^{n}\,\delta\delta'\delta''\ldots;$$

alors D_2^n sera le produit des facteurs de D_2 qui ne divisent pas D_3; car 1° D_2^n ne divise pas D_3, puisque, d'après la manière dont on a opéré, D^n_2 et D_3 ont pour plus grand commun diviseur $\delta^n = 1$; 2° tous les autres facteurs de D_2, savoir : δ, δ'..., divisent D_3.

De là on conclut que le polynôme D^n_2 est précisément le polynôme cherché

$$X_2.$$

En opérant de même sur D_3 et D_4, on obtiendrait le polynôme X_3, et ainsi de suite. (On aurait pu isoler d'abord le polynôme X_1 au moyen de X et de D_2.) Le problème des racines égales doit donc être considéré comme résolu.

Mais la méthode que je viens d'exposer, quoique suffisante en théorie, devenant le plus souvent impraticable à cause de la longueur des calculs qu'elle exige, il est nécessaire d'avoir recours à une autre méthode; c'est celle que je vais expliquer sommairement.

Seconde méthode. Elle est fondée sur la considération des polynômes dérivés.

Si dans un polynôme $f(x)$ on remplace x par $x+h$, on sait que l'on obtient un développement de la forme

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots..+f^m(x)\frac{h^m}{1.2\ldots m},$$

$f'(x)$, $f''(x)$... étant les polynômes dérivés successifs de $f(x)$.

Supposons, pour un moment, que $f(x)$ n'ait que des racines simples,

$$f(x)=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)..;$$

je vais chercher quelle sera la composition de $f'(x)$:

$f'(x)$ est le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x+h)$. Remplaçant x par $x+h$ dans l'identité précédente, on aura encore identiquement

$$f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+\ldots.=(\overline{x-a}+h)\,(\overline{x-b}+h)\,(\overline{x-c}+h)..$$

On peut développer le second membre suivant la loi qu'on démontre au sujet du binôme de Newton; on aura ainsi

$$f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+\ldots=S_m+S_{m-1}h+\ldots,$$

S_m, S_{m-1} ... désignant respectivement les produits des facteurs $(x-a)$ $(x-b)$... m à m, $m-1$ à $m-1$..... De là on déduit la composition de $f'(x)$

$$f'(x)=S_{m-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$f'(x)=\Sigma\,\frac{f(x)}{x-a}.$$

Voici maintenant le théorème sur lequel s'appuie cette seconde méthode.

Théorème. *Il existe toujours entre* f(x) *et* f′(x) *un plus grand commun diviseur; et ce plus grand commun diviseur est le produit des facteurs binômes de* f(x) *élevés à des puissances dont les exposants sont moindres d'une unité.*

Démonstration. Soit $f(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q.....$; puisque les racines sont devenues égales à a,..... on aura évidemment

$$f'(x) = n\frac{f(x)}{x-a}+p\frac{f(x)}{x-b}+q\frac{f(x)}{x-c}+.....$$

$$=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}...\left\{\begin{array}{l} n(x-b)(x-c...\\ +p(x-a)(x-c)...\\ +q(x-a)(x-b)...\\ +..... \end{array}\right.$$

et l'on voit déjà que le polynôme

$$D=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}.....$$

divise exactement $f(x)$ et $f'(x)$. Pour faire voir qu'il est leur plus grand commun diviseur, il suffit de montrer que $\frac{f(x)}{D}$ et $\frac{f'(x)}{D}$, ou simplement $f(x)$ et $\frac{f'(x)}{D}$, sont premiers entre eux. Or, $f(x)$ n'admet pas d'autre facteur que $(x-a)$, $(x-b)$..... L'un quelconque de ces facteurs, $(x-a)$ par exemple, divisant toutes les parties de $\frac{f'(x)}{D}$, hors une, ne peut diviser $\frac{f'(x)}{D}$. Donc puisque tous les facteurs de $f(x)$ sont étrangers à $\frac{f'(x)}{D}$, il s'ensuit que $f(x)$ et $\frac{f'(x)}{D}$ sont premiers entre eux; ce qui démontre le théorème, car D est le produit de tous les facteurs binômes de $f(x)$ élevés chacun à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité.

(Cela s'étend même aux facteurs simples de X, lesquels sont élevés dans D à la puissance zéro.)

Cela posé, voici comment on peut décomposer $f(x)$ en ses facteurs des différents degrés de multiplicité.

Écrivons, comme tout à l'heure,

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots\ldots$$

Soit D le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f'(x)$; alors

$$D = X_2^1 X_3^2 X_4^3 \ldots\ldots$$

De même, soit E le plus grand commun diviseur entre D et son dérivé,

$$E = X_3^1 X_4^2 \ldots\ldots$$

$$F = X_4^1 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Divisant chaque polynôme par celui qui le suit, nous aurons

$$\frac{Q}{Q'} = X_1,$$

$$\frac{Q'}{Q''} = X_2,$$

$$\frac{Q''}{Q'''} = X_3,$$

$$\ldots\ldots$$

Voilà donc les facteurs simples de X qui se trouvent isolés.

On voit, d'après cela, comment il faudra opérer toutes les fois qu'il s'agira de séparer les racines des divers degrés de multiplicité d'une equation.

Mais avant tout, il sera bon de débarrasser l'équation donnée des racines commensurables qu'elle peut contenir. On trouvera d'abord ces racines par les procédés connus, et pour reconnaître quel est leur degré de multiplicité, on opérera par des divisions successives, ou bien en se fondant sur le théorème suivant :

Si une équation $Fx = 0$ admet n racines égales à a, les *polynômes dérivés* $f(x), f'(x), \ldots\ldots$ *jusqu'au* $(n-1)^e$, *admettent la même racine* a; *et réciproquement.*

En effet, diminuons toutes les racines de $f(x)=0$, de la quantité a, en posant

$$y = x - a, \quad \text{d'où} \quad x = a + y,$$

la transformée en y devra admettre n racines nulles. Or cette transformée est

$$f(a+y) = f(a) + f'(a)\frac{y}{1} + f''(a)\frac{y^2}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$+ f^{n-1}(a)\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots\ldots f^m(a)\frac{y^m}{1.2.3\ldots m}$$

Donc on devra avoir

$$f(a)=0, \quad f'(a)=0, \ldots \quad f^{n-1}=0.$$

La réciproque est évidente.

On pourra donc trouver quel est le degré de multiplicité d'une racine commensurable a, en cherchant quel est l'ordre du dernier dérivé que cette racine anéantit. C'est ce qu'on pourra voir encore en supprimant la racine a dans $f(x)$ par la division, autant de fois qu'il sera possible

On sent pourquoi ce mode de vérification ne peut être appliqué aux racines incommensurables. C'est parce que toute racine incommensurable ne peut s'obtenir qu'avec une approximation plus ou moins grande. Mais, dans tous les cas, le nombre a n'étant qu'approché, la vérification, qui consiste à voir si $f(a)$, $f'(a)$ ..... sont nuls, ne pourrait être qu'approchée, c'est-à-dire défectueuse

A la rigueur, ce mode de vérification pourrait s'appliquer aux racines imaginaires ($\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant commensurables). Il faudrait alors résoudre $f(x)$ en substituant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x, ce qui donnerait un résultat de la forme $\quad P + Q\sqrt{-1}$, et par suite les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

équations à deux inconnues, dont on pourrait déterminer les racines réelles commensurables. Mais il vaut mieux, pour la simplicité des calculs, n'opérer la recherche des racines imaginaires qu'après la séparation effectuée des diverses racines suivant leur multiplicité.

Voilà donc comment on arrive au but principal que l'on se propose dans la théorie des racines égales. A cette théorie se rattachent d'ailleurs une foule de questions particulières. Par exemple, on peut demander les conditions pour qu'un polynôme donné $f(x)$ admette un certain nombre de racines egales entre elles. On opérera sur $f(x)$ comme si on voulait isoler X_n, et on écrira à mesure les conditions nécessaires pour l'existence de ce polynôme. A cet effet, on pourra employer l'une quelconque des méthodes que nous avons donnees; mais il sera généralement plus simple de s'appuyer sur la remarque que nous avons faite tout à l'henre. En désignant par a la racine inconnue qui doit entrer dans $f(x)$ au degré n de multiplicité, on devra avoir :

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots\ldots \quad f^{n-1}(a) = 0.$$

Les conditions demandées s'obtiendront en éliminant a entre ces n équations; on aura ainsi $(n-1)$ équations de condition. On pourrait aussi exprimer qu'il existe entre $f(x)$ et $f'x)$ un plus grand commun diviseur du $(n-1)^e$ degré, ce qui donnerait $(n-1)$ équations de condition, en identifiant à zéro le dernier reste de l'équation; et de plus, il faudrait exprimer que ce plus grand commun diviseur est une $(n-1)^e$ puissance exacte, ce qui donnerait en sus $(n-2)$ conditions. Toutes ces conditions devraient ensuite se réduire à $(n-1)$ ..... etc.

SECONDE PARTIE.

Méthode qu'on peut tirer de la théorie des racines égales pour mener les tangentes aux courbes algébriques.

Soit une droite MN qui coupe une courbe en divers points M, N, ... Si l'on conçoit que la droite MN tourne autour du point M, jusqu'à ce qu'un second de ses points d'intersection N vienne coïncider avec le premier, dans cette position, la sécante sera devenue *tangente*.

Ainsi, on peut définir la tangente à une courbe, en la considérant comme une droite dont deux points d'intersection se sont réunis en un seul, la droite ayant tourné autour de l'un d'eux comme fixe. Par là on voit qu'une tangente peut avoir un nombre illimité de points communs avec la courbe, sans cesser d'être tangente, et qu'une droite qui n'aurait qu'un point commun avec la courbe, ne serait pas pour cela tangente.

Cela posé, il s'agit de mener une tangente à une courbe algébrique
$$f(x, y) = 0,$$
d'après la théorie des racines égales.

Soit
$$y = ax + b,$$
l'équation de la tangente cherchée; je vais déterminer les conditions auxquelles cette droite doit satisfaire pour être tangente. Si l'on cherche les coordonnées d'intersection de cette droite avec la courbe, on aura, pour déterminer x, l'équation
$$f(x, ax+b) = 0.$$
Cette équation admet autant de valeurs réelles de x, que la droite aura de points sur la courbe. Si maintenant on veut que la droite devienne tangente, c'est-à-dire que deux de ses points d'intersection viennent se réunir en un seul, il faudra que l'équation
$$f(x, ax+b) = 0$$

admette une racine double. Cette condition est suffisante; car la droite ayant deux points qui coïncident, c'est-à-dire deux points infiniment voisins sur la courbe, sera évidemment tangente.

La question est donc ramenée à déterminer les conditions pour qu'une équation algébrique

$$f(x,\ ax+b)=0$$

ait deux racines égales entre elles.

Pour cela, on pourra, ainsi que nous l'avons indiqué, chercher le plus grand commun diviseur entre $f(x,\ ax+b)$ et $f'(x,\ ax+b)$, et exprimer que ce plus grand commun diviseur est du premier degré, ce qui se fera en égalant le dernier reste de l'équation à zéro, et donnera une condition de la forme $$\varphi(a,\ b)=0;$$
ou bien on pourra diviser $f(x,\ ax+b)$ par un facteur de la forme $(x-\alpha)^2$, et exprimer que le reste, qui sera du premier degré en x, doit être identiquement nul. On aura deux équations de la forme $M=0$, $N=0$, M et N étant des fonctions de a, b, α. Eliminant α entre ces deux relations, on devra trouver la condition cherchée $\varphi(a,\ b)=0$. Le procédé qui consiste à éliminer x entre les deux équations $f(x,\ ax+b)=0$, $f'(x,\ ax+b)=0$, ramènerait au premier mode de calcul.

On aura donc ainsi l'équation de la tangente à la courbe $f(x,y)=0$; et cette équation sera

$$y=ax+b, \qquad \text{avec la condition} \qquad \varphi(a,\ b)=0.$$

Dès lors on peut résoudre toutes les questions qu''il est possible de se proposer sur les tangentes. Par exemple :

Mener une tangente qui passe par un point donné $(x',\ y')$.

Il faudra joindre à la condition $\varphi(a,\ b)=0$ la condition $y'=ax'+b$; et les deux équations détermineront complétement a et b.

Mener une tangente parallèle à une droite donnée.

Le coefficient angulaire a de la tangente cherchée sera le même que celui de la droite donnée ; et l'ordonnée de la tangente sera donnée par l'équation à une inconnue

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Généralement, on pourra demander que la tangente satisfasse à une condition exprimée par une relation de la forme

$$\psi(a, b) = 0.$$

On aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\psi(a, b) = 0, \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

Deux conditions déterminent la tangente, ainsi que toute droite. Ce n'est que dans des cas particuliers qu'on pourra assujettir la tangente à satisfaire à plusieurs conditions à la fois, marquées par des équations de la forme

$$\psi(a, b) = 0, \quad \psi_1(a, b) = 0. \; . \; . \; . \; . \text{ outre } \varphi(a, b) = 0.$$

Il faudra que toutes ces équations admettent un certain nombre de solutions communes.

Cette manière de mener les tangentes à une courbe ne pourrait être regardée comme complétement satisfaisante, si elle ne faisait pas connaître la forme remarquable qu'est susceptible de prendre le coefficient angulaire de la tangente menée par un point donné sur la courbe. Or la détermination de ce coefficient angulaire peut se rattacher à la théorie des racines égales.

En effet, supposons d'abord que l'origine des coordonnées soit sur la courbe, et que ce soit par ce point qu'on veuille lui mener une tangente. L'équation de la courbe sera de la forme $\qquad \mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}x^2 + \mathrm{E}xy + \mathrm{F}y^2 + \ldots.. = 0,$

et celle de la tangente $\qquad y = ax.$

Les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe seront données par l'équation

$$(B + Ca)x + (D + Ea + Fa^2)x^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Il faut actuellement exprimer que cette équation a des racines égales ; et l'on sait déjà que ces deux racines égales doivent être nulles. On a donc immédiatement

$$B + Ca = 0.$$

Du reste, en appliquant les procédés ordinaires, ils donnent le même résultat. En effet, la première méthode consiste à diviser $f'(x)$ par $(x-\alpha)^2$, ici égal à x^2 à cause de la valeur connue $\alpha = 0$, et à égaler à zéro le reste $B + Ca$. La seconde méthode consiste à chercher le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$; et comme on sait d'ailleurs quel doit être ce plus grand commun diviseur, $x - \alpha = x$, cela revient à dire que $f(x)$ ou $B + Ca + x(\ldots\ldots) + \ldots\ldots = 0$ admet une racine nulle, ce qui donne $B + Ca = 0$. Enfin, on a vu que le troisième procédé, dans le cas d'une racine double, est le même que le second.

Ainsi, on voit que la théorie des racines égales indique la condition

$$B + Ca = 0,$$

d'où $\quad a = -\dfrac{B}{C} = -\dfrac{f'\alpha}{f'\beta}$ (puisque l'on a $B\alpha + C\beta + \ldots = 0$).

Nous avons supposé que le point de la courbe par lequel on veut mener la tangente était à l'origine des coordonnées. Or, on peut toujours transporter l'origine au point par lequel on voudra mener la tangente. Ainsi, soit (α, β) ce point il faudra substituer dans l'équation,

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y';$$

et l'on aura, comme on sait,

$$f(\alpha, \beta) + f'_\alpha x' + f'_\beta y' + \ldots = 0.$$

En appliquant la méthode qui précède, on aura encore

$$a = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est donc la valeur générale du coefficient angulaire de la tangente, obtenue par un procédé qui se rattache à la théorie des racines égales.

La théorie des racines égales fournit encore le moyen de déterminer les points d'inflexion d'une courbe

$$f(x, y) = 0;$$

il suffit en effet d'exprimer que la droite MN,

$$y = ax + b,$$

a trois points communs infiniment voisins sur la courbe, ou que l'équation $f(x, ax + b) = 0$ a trois racines égales entre elles; et de même pour les cas de contact plus intime, où la courbe est coupée par la droite en un plus grand nombre de points. Mais il existe pour toutes ces déterminations des méthodes plus expéditives; ces méthodes ne doivent pas être exposées ici.