NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Démonstration du théorème de M. Chasles, sur les arcs semblables d'une conique ; et autres considérations sur les arcs curvilignes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 506-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__506_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. CHASLES,

sur les arcs semblables *d'une conique; et autres considérations sur les arcs curvilignes.*

—

I. Théorème 1. Une sécante coupe une courbe plane en deux points M et M', par ces points menons des tangentes se rencontrant en un point I; supposons que la sécante tourne infiniment peu autour d'un point fixe O, situé sur la sécante, et que les points de rencontre deviennent respectivement m et m': on a la proportion $\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}'m'} = \frac{\mathrm{OM.MI}}{\mathrm{OM'.M'I}}$.

Voir la démonstration p. 183 et 184 (IV et V).

Observation. Le théorème est dû à Newton, il sert de base à ses applications du calcul *fluxionnel* à des questions de géométrie (*).

II. Une droite D et une conique C étant situées dans le même plan, sur D prenons deux points I et i infiniment voisins. Soient MM' la polaire du point I, et mm' celle du point i; le point d'intersection O sera le pôle de la droite D, et le théorème précédent donne le rapport fini auquel est égal le rapport différentiel $\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}'m'}$.

(*) *Tractatus de quadraturâ curvarum. Introductio.* — Cet ouvrage a paru en 1706, à la suite de *Enumeratio Linearum*, etc.

III. Il existe encore une autre relation pour ce rapport différentiel. Soit N le point de rencontre des deux tangentes consécutives IM, im : MNm est l'angle de contingence; portons NI sur Ni de N en P, de sorte qu'on a :

$$iP = iN - IN = im - IM - (mN + MN) = iI \cos iIP,$$

car le triangle IiP est rectangle en P. On aura de même de l'autre côté de Ii :

$$iP' = iN' - IN' = Im' - IM' - (m'N' + M'N') = iI \cos iIP'.$$

Les points analogues sont désignés par les mêmes lettres accentuées. Fixons sur la conique un point R entre M et M'; soient $Im = t$, $Im' = t'$, $RM = s$, $RM' = s'$, $im - IM = dt$, $Im' - IM' = dt'$: $mN + MN = mM = ds$, $m'N' + M'N' = ds'$, car dans le triangle mNM l'angle diffère infiniment peu de deux angles droits. On a donc $\dfrac{\cos . iIP}{\cos iIP'} = \dfrac{dt - ds}{dt' - ds'}$.

IV. Si, au lieu de la droite D on prend une courbe quelconque C', les angles iIP, iIP' sont les angles que forme la tangente à la courbe C', passant par I, avec les tangentes IM, IM' menées par ce point à la conique C ; si la courbe C' est telle que le rapport des cosinus de ces angles soit constamment égal au nombre r, de sorte que MI étant le rayon incident, IM' soit le rayon réfracté selon le rapport r de réfraction ; on aura $n = \dfrac{dt - ds}{dt' - ds'}$, d'où $n(t' - s') = t - s +$ constante. Il suffit de connaître les valeurs de t, s, t', s' répondant à un point de la courbe C' pour déterminer la valeur de la constante. n étant donné, il est facile de trouver l'équation différentielle de la courbe C'; nous la donnerons en traitant des caustiques par réfraction et des lignes aplanétiques ; pour le moment, il suffit de remarquer qu'au point où C' rencontre C, on a évidemment $n = \pm 1$; donc si n n'est pas égal à 1, la courbe C' ne peut pas rencontrer la conique C ; supposons donc $n = 1$, nous savons qu'alors C' et C sont deux coniques bi-confocales se coupant orthogonalement ; prenons ce point d'intersection pour le point fixe R ; en ce point t, s, t', s' sont nuls ; donc on a $t' - s' = t - s$ ou $t' - t = s' - s$, ce qui démontre le beau théorème de M. Chasles. (*V*. p. 425.)

Observation. Le célèbre géomètre donne le nom d'arcs *semblables* à deux arcs dont la différence est égale à une droite ; ces arcs n'étant pas *semblables* dans le sens ordinaire du mot, il est à désirer qu'on indique une autre dénomination ; ne pourrait-on pas les désigner par *arcs correspondants ?* Le mot *correspondant* a déjà été introduit par M. Ivory dans la théorie des attractions des sphéroïdes, dont on doit à M. Chasles une exposition si intuitive.

L'expression homo-focale ne paraît pas non plus convenable ; outre que sa formation est hybride, elle ne dit pas que les *deux* foyers sont communs.

V. Ce théorème donne la solution de plusieurs problèmes importants.

Problème 1. Partager l'arc MN de conique en deux arcs correspondants ?

Solution. Par M et N on mène des tangentes à la conique ; soit I le point de rencontre, par ce point on fait passer une conique bi-confocale à la conique donnée, le point d'intersection R des deux coniques est le point de division cherché.

Observation. L'intersection de deux coniques confocales, et *à fortiori* bi-confocales, peut toujours se construire *géométriquement*.

Problème 2. Étant donnés trois points M, N, M' d'une conique tracée, trouver un quatrième point N' tel que les deux arcs MN, M'N' soient correspondants.

Solution. Soit I le point d'intersection des deux tangentes menées par M et M' ; par I faisons passer une conique bi-confocale, qui sera rencontrée en I' par la tangente menée par

N ; par ce même point I′ menant une tangente à la conique donnée, le point de contact sera le point N′ cherché.

Problème 3. Partager la demi-ellipse en deux arcs correspondants.

Solution. Soient C le centre de l'ellipse ; A et A′ les extrémités d'un diamètre ; AT, A′T les deux tangentes parallèles, T est un point situé à l'infini ; construisons une hyperbole bi-confocale ayant pour asymptote la droite CT ; elle coupe la demi-ellipse en un point R, donc $RA' - RA = A'T - AT$: abaissons de A′ une perpendiculaire A′P sur AT, on aura $A'T - AT = AP$; donc $RA' - RA = AP$, c'est-à-dire que la différence des arcs est égale à la projection du diamètre sur la tangente passant par son extrémité.

VI. *Théorème.* La longueur infinie des asymptotes, moins la longueur infinie des hyperboles, est une quantité finie.

Démonstration. Soient C, A, F le centre, le sommet, le foyer voisin d'une hyperbole ; AR le quart de l'hyperbole, R étant le point situé à l'infini ; CR la longueur infinie de l'asymptote ; soit encore I le point où la tangente au sommet A rencontre l'asymptote ; concevons une ellipse bi-confocale passant par I et coupant orthogonalement l'hyperbole en M, nous aurons :

$$\begin{aligned} CR - AR &= CI + IR - AM - MR \\ &= CI + IR - 2AM + AM - MR. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de M. Chasles, $AM - MR = AI - IR$, donc $CR - AR = CI + AI - 2AM$. C. Q. F. D.

Observation. Ce dernier théorème et le moyen de trouver des arcs correspondants dans les coniques et dans d'autres courbes sont connus depuis longtemps et remontent jusqu'au comte Fagnano (1750) ; Legendre en a donné une théorie analytique complète sous le titre de *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, 2 vol. in-4°, mais la relation entre cette théorie et celle des coniques bi-confocales est une des plus belles découvertes de l'auteur de l'histoire des méthodes en géométrie (*).

VII. *Théorème.* Deux courbes algébriques ne peuvent avoir des arcs égaux sans se confondre.

Démonstration. On peut placer les deux courbes de manière à avoir cet arc en commun, alors elles auront donc une infinité de points en commun sans se confondre, ce qui est impossible, donc, etc.

Observation. Apollonius démontre qu'un arc d'ellipse ne peut être égal à un arc de cercle, etc., et en général que l'arc d'une conique ne peut être placé sur un arc d'une conique différente. (Liv. VI, prop. VI.)

VIII. On démontre de la même manière que dans la même courbe deux arcs ne peuvent être égaux, à moins que la courbe ne soit symétrique par rapport à un axe : les arcs égaux sont placés symétriquement.

Observation. Apollonius démontre encore que dans le même quadrant d'ellipse, dans la même demi-parabole et dans la même demi-hyperbole, on ne peut prendre des arcs superposables. (Prop. XIX.) Tm.