NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème sur la différence entre l'arc et son sinus, d'après Pappus

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 49-51

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__49_1>

THÉORÈME

SUR LA DIFFÉRENCE ENTRE L'ARC ET SON SINUS,

D'après Pappus.

Théorème. La différence entre un arc du premier quadrant et son sinus est moindre que le double du carré de l'arc divisé par le rapport de la circonférence au diamètre.

Démonstration. Faisant le rayon égal à un, représentons la longueur de l'arc par a, de sorte que $2a<\pi$; on a les inégalités suivantes :

$$a<\operatorname{tang} a \qquad (1), \qquad \cot. a>\frac{\pi}{2}-a \qquad (2)$$

$$a\cos a<\sin a \qquad\qquad \cos a>\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin a$$

$$a\cos^2 a<\sin a\cos a \qquad\qquad \left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin^2 a<\sin a\cos a$$

$$a-a\sin^2 a<\sin a\cos a$$

$$a\sin^2 a>a-\sin a\cos a;$$

donc

$$\frac{a\sin^2 a}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin^2 a}>\frac{a-\sin a\cos a}{\sin a\cos a};$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}-a}{a}<\frac{\sin a\cos a}{a-\sin a\cos a}; \qquad \frac{\pi}{2a}<\frac{a}{a-\sin a\cos a} \qquad (3)$$

Ainsi $a-\sin a\cos a<\frac{2a^3}{\pi}$ et *à fortiori* $a-\sin a<\frac{2a^3}{\pi}$.

Observation I. On parvient à ce théorème en écrivant en caractères algébriques la proposition XV (théorème XIV) du 5e livre de Pappus ; cette proposition n'est autre que l'inégalité (3), que Pappus énonce ainsi : Le rapport de l'aire d'un secteur à l'aire de son segment est plus grand que le rapport de l'angle droit à l'angle du secteur. C'est ce qu'il démontre par des considérations géométriques.

Observation II. Les séries donnent pour limite $a-\sin a<\frac{a^3}{6}$ (t. II, p. 216) ; cette limite, moindre que celle de Pappus, est par conséquent préférable.

Observation III. Lorsque a est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on a $a<\frac{2a^3}{\pi}$, et alors la limite de Pappus est intuitive.

Observation IV. Pappus se sert de cette même proposition XV pour démontrer celle-ci · Si une demi-circonférence et un arc de cercle sont de même longueur, l'aire du demi-cercle est plus grande que l'aire du segment formé par l'arc et sa corde (prop. XVII du liv. 5).

Observation V. Pappus, auteur du quatrième siècle, ne connaissait pas nos lignes trigonométriques. On doit les sinus et sinus-verse à Mohammed-ben-Geber, de Batan en Mésopotamie, auteur arabe du neuvième siècle, surnommé Albategnius, et mort en 928. Les tangentes et cotangentes ont été introduites par Mohammed-ben-Yahya, prince de Syrie, auteur astronome du X^e siècle connu sous le nom de Aboul-Wéfa, le même auquel on voulait attribuer, il y a quelques années, la découverte de la *variation*, inégalité lunaire; assertion détruite récemment par M. Munk, orientaliste distingué et par l'illustre M. Biot, de l'Académie. L'emploi des sécantes est dû à Joachim (Georges), surnommé Rhéticus, né à Feldkirk, dans le pays des Grisons (Rhetia), le 16 février 1514, mort en Hongrie le 4 décembre 1576; mais son ouvrage, *Opus palatinum de triangulis*, n'a paru qu'en 1596. Tm.