GÉRONO

Solution géométrique des questions proposées au concours de 1844

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 495-506

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__495_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS DE 1844.

(V. p. 377.)

—

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Étant donnés une ellipse et un point A *sur la circonférence ;*

on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celle qui toucherait les deux courbes données au point A. *On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle?*

La solution que nous allons donner est fondée sur les propositions suivantes :

1. *Le centre du cercle inscrit dans un triangle* ABC (fig. 66), *est situé sur la droite* ML, *menée du milieu* M *d'un des côtés* BC *du triangle, au milieu* L *de la droite* AD *qui joint le sommet* A, *opposé au côté considéré* BC, *au point de tangence* D *de ce côté et du cercle inscrit.* Et de même, *le centre* O′ *du cercle qui touche un côte* BC *d'un triangle et les prolongements des deux autres côtés* AB, AC, *est sur le prolongement de la droite* ML′, *menée du milieu* M *du premier côté, au milieu de la droite* AD′ *qui joint le sommet opposé* A *au point de tangence* D′ *de ce côté et du cercle ex-inscrit.*

En effet, concevez une hyperbole dont les foyers soient B et C, et qui passe par le point A; elle aura pour sommets D et D′, car DC — DB = AC—AB, et d'ailleurs D′C = DB. Les droites DO, D′O′, perpendiculaires à BC, aux points D, D′, seront tangentes à l'hyperbole, à ses sommets ; et la bissectrice AOO′ de l'angle BAC des rayons vecteurs AB, AC, touchera aussi la courbe au point A. Les droites ML, ML′ sont les diamètres de l'hyperbole, menés par les milieux des cordes de contact AD, AD′; donc, la droite ML passe par le point O d'intersection des tangentes DO, AO ; et de même, la droite ML′ doit passer par le point d'intersection O′ des tangentes AO′, D′O′.

La même proposition s'applique aux ellipses inscrites dans un triangle, et aux ellipses ex-inscrites : c'est ce que l'on reconnait immédiatement en plaçant ces ellipses sur des cylindres droits à bases circulaires.

2. *La droite qui unit les milieux* M, L *des diagonales d'un quadrilatère* ABCD (fig. 67), *circonscrit à un cercle, passe par le centre* O *de ce cercle.*

Les sommes des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit étant égales entre elles, on a : AC — AB = DC — DB ; et par conséquent l'hyperbole dont les foyers sont B et C, et qui passe par le point A, contiendra aussi le point D. Les bissectrices AO, DO des angles BAC, BDC, seront tangentes à la courbe aux points A, D. La droite LM est menée du milieu L de la corde des contacts au centre M de l'hyperbole ; donc, elle contient le point O d'intersection des deux tangentes (*).

Cette proposition convient aussi à l'ellipse inscrite dans un quadrilatère ; et c'est encore ce qui résulte simplement de ce qu'on peut placer l'ellipse sur un cylindre droit à base circulaire. Je ferai, de plus, observer qu'il est toujours possible d'inscrire dans un quadrilatère convexe ABCD (*fig.* 68), une ellipse dont le centre soit un point donné O, sur la droite LM qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère. Nous supposons que le quadrilatère ABCD n'est pas un parallélogramme, autrement les points L, M coïncideraient. Ainsi, deux des côtés opposés de ce quadrilatère se rencontreront en un point F, en formant le triangle FCD. Or, si l'on inscrit dans le triangle FCD une ellipse dont le centre soit le point O, cette ellipse touchera nécessairement le quatrième côté AB du quadrilatère.

Car, si l'ellipse ne touche pas la droite AB, on pourra, par le point A, mener une droite AG, autre que AB, et tangente à la courbe. Le quadrilatère AGDC étant circonscrit à l'ellipse, la droite LO, menée du milieu de l'une des diago-

---

(*) On peut aussi déduire ce théorème et le précédent des propositions de la géométrie élémentaire, voyez les notes placées à la fin de cet article.

nales AD au centre O de l'ellipse, devra couper l'autre diagonale CG en son milieu, au point I. Les points M, I étant respectivement les milieux des droites CB, CG, il faudra que IML soit parallèle à GB. En menant par le point B une tangente à l'ellipse, on prouverait, de même, que ML est parallèle à CA. Par conséquent les deux droites DB, CA seraient parallèles ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Et de là, nous conclurons que : *si les bissectrices* AO, DO *de deux angles opposés d'un quadrilatère convexe* ABCD (fig. 67), *se coupent en un point* O, *situé sur la droite* LM *qui unit les milieux des diagonales*, *ce quadrilatère sera circonscriptible au cercle.*

En effet, si l'ellipse inscrite dans le quadrilatère ABCD, et qui a son centre au point O, ne se réduisait pas à une circonférence lorsque ce point se trouve à la fois sur les bissectrices AO, DO de deux angles opposés BAC, BDC, il faudrait que ces deux bissectrices fussent perpendiculaires l'une à l'autre, puisqu'elles seraient dirigées suivant les deux axes de l'ellipse (*). Alors, la somme des trois angles BAO, BDO, ABD du quadrilatère convexe ABDO serait égale à trois angles droits. Il en résulterait $BAO + BDO > 90°$, d'où $CAO + CDO > 90°$, et par suite la somme des trois angles BAC, BDC, ABD du quadrilatère ABDC serait plus grande que celle des quatre angles du quadrilatère ABDO, et surpasserait quatre angles droits ; ce qui est impossible.

3. *Si d'un point* M *pris hors d'une ellipse* (fig. 69), *on mène deux tangentes* MD, MD' *à la courbe*, *et deux droites* MF, MF' *aux foyers*, *la bissectrice de l'angle des tangentes divisera*

(*) Nous supposons que les bissectrices AO, DO se coupent; si elles étaient en prolongement l'une de l'autre, elles coïncideraient avec la diagonale AD, et dans ce cas, le quadrilatère ABCD serait évidemment circonscriptible, puisque les bissectrices de trois angles consécutifs de ce quadrilatère se rencontreraient en un même point.

aussi en deux parties égales l'angle des deux droites menées aux foyers.

Sur les prolongements des rayons vecteurs F'D, F'D', je prends DE = FD, et D'E' = FD'. Les droites F'E, F'E' seront egales au grand axe de l'ellipse ; et d'ailleurs, les tangentes MD, MD' étant perpendiculaires sur les milieux des droites FE, FE', on aura ME = MF = ME' : ainsi, les triangles F'ME, F'ME' seront équiangles entre eux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que l'angle F'ME' = F'ME = $\frac{1}{2}$ E'ME. Or, les tangentes MD', MD divisant en parties égales les angles E'MF, EMF, on a aussi D'MD = $\frac{1}{2}$ E'ME ; donc, D'MD = F'ME, ou D'MF' = DME = DMF, et par conséquent la bissectrice de l'angle D'MD divise en parties égales l'angle F'MF.

L'égalité des triangles F'ME', F'ME donne encore E'F'M = EF'M ; ainsi, *la droite* F'M *qui joint un des foyers au point de concours des tangentes est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés de ce foyer aux deux points de contact.* (*V.* t. II, p. 538.)

4. Il est maintenant facile de résoudre la question proposée.

Soient F, F' les foyers de l'ellipse donnée (fig. 70); A le point auquel la circonférence, dont le rayon AO est variable, touche l'ellipse; et QAR, PQN, PRN' les tangentes communes à ces deux courbes; H, G les points de rencontre des rayons vecteurs FA, F'A et des droites PF', PF. Si l'on joint le milieu L de PA au milieu M de QR, la droite LM contiendra le centre O du cercle inscrit dans le triangle PQR. Le prolongement de cette droite passera par le centre C de l'ellipse qui touche le côté QR au point A, et les prolongements des côtés PQ, PR aux points N, N' (n° 1). La droite LM contient encore le milieu I de la droite HG, car les milieux L, I, C des trois diagonales PA, HG, F'F d'un quadrilatere *complet* PHAGF'F, sont situés sur une même droite. De plus, la ligne AO, prolongement de la normale AS à l'ellipse au point A, divise en parties égales l'angle HAG opposé au sommet de l'angle F'AF des rayons vecteurs ; et la droite PO, bissectrice de l'angle N'PN des tangentes menées à l'ellipse par le point P, divise aussi en parties égales l'angle F'PF des droites PF', PF, menées du point P aux foyers de l'ellipse (n° 3). Donc, les bissectrices AO, PO de deux angles opposés du quadrilatère AHPG, se coupent en un point O de la droite LI qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère, et par conséquent le quadrilatère AHPG est circonscriptible à un cercle dont le centre est au point O (n° 2, page 498). Nommons D, D', E, E' les points auxquels la circonférence inscrite touche les quatre côtés du quadrilatère AHPG, et nous aurons, à cause de l'égalité des tangentes PE', PE :

$$PF' - PF = F'E' - FE = F'D - FD' = F'A - FA.$$

Ainsi, la différence des distances du point P aux foyers F', F, est égale à la différence des rayons vecteurs F'A, FA ; donc, le lieu géométrique du point P est une hyperbole dont les foyers sont ceux de l'ellipse, et qui passe par le point A donné sur cette courbe.

La normale AS à l'ellipse est tangente à l'hyperbole ; ces deux courbes se coupent à angle droit.

5. Si la courbe donnée, au lieu d'être une ellipse, était une parabole ou bien une hyperbole, la détermination du lieu géométrique proposé résulterait encore simplement des principes que nous venons d'établir, en ayant soin, toutefois, d'y apporter les modifications qui servent à passer des propriétés fondamentales de l'ellipse à celles des deux autres courbes du second degré. Quoique cette recherche ne puisse offrir aucune difficulté, nous résoudrons encore la question proposée

pour le cas de la parabole, en étendant à cette courbe les théorèmes des nos 1 et 3.

Supposons qu'une parabole, (*fig.* 71), touche la base BC d'un triangle ABC au point D, et les prolongements des deux autres côtés AB, AC, aux points E, E′ : la droite ML qui joint le milieu M de la base au milieu L de la droite AD, menée du sommet du triangle au point de contact de la base, sera parallèle à l'axe de la parabole.

Cette propriété peut être déduite de la proposition du n° 1, en assimilant la parabole à une ellipse dont le centre est à l'infini, ou bien en plaçant la parabole sur un cône droit à base circulaire; mais on peut aussi la démontrer directement de la manière suivante :

Par le sommet A du triangle ABC, je mène une parallèle AO à l'axe de la parabole ; elle divisera en deux parties égales la corde des contacts EE′. Par conséquent, les parallèles EG, E′G′ menées à la base BC, jusqu'à la rencontre de AO, seront égales entre elles. Soient N, N′ les points de rencontre de ces droites EG, E′G′ et de la parallèle à l'axe qui passe par le point D : on aura $E'N' - EN = 2NG = 2DI$. Mais, la sous-tangente HN étant double de l'abscisse DN, on a $EN = 2BD$, et de même $E'N' = 2CD$; donc, $CD - BD = DI$, d'où $CI = BD$. Il s'ensuit que le point M, milieu de BC, est aussi le milieu de DI ; donc, LM est parallèle à la droite AIO ; c'est ce qu'il fallait démontrer, puisque AO est parallèle à l'axe de la parabole.

Si d'un point C *situé hors d'une parabole* (fig. 72), *on mène à cette courbe deux tangentes* CD, CE, *et une droite* CF *au foyer* F, *la bissectrice de l'angle* DCE *des tangentes divisera en deux parties égales l'angle* FCL *que forment la droite* CF *dirigée au foyer et une parallèle* CL *à l axe, conduite par le point* C *donné.*

En effet, abaissez des trois points D, C, E des perpendiculaires DG, CM, EH sur la directrice GH, et tirez les droites CG, CF, CH ; les triangles GDC, CDF seront égaux, car l'angle CDG = CDF, et, de plus, DG = DF. De même, les triangles CEH, CEF seront égaux entre eux ; ainsi, CG = CF = CH. Les droites CD, CE, CM étant respectivement les bissectrices des angles GCF, FCH, HCG, dont la somme vaut quatre angles droits, on aura GCD + FCE + GCM = 180° ; d'ailleurs, GCD + DCL + GCM = 180° ; donc, FCE = DCL. Il s'ensuit que la bissectrice de l'angle DCE divise en deux parties égales l'angle FCL.

6. Au moyen de ces remarques, on déterminera facilement le lieu géométrique cherché.

Soient F le foyer de la parabole donnée ; O le centre du cercle tangent à la parabole au point A (*fig.* 73) ; QAR, PQD′, PRD les tangentes communes aux deux courbes ; N, E les points d'intersection des droites FA, FP, et des parallèles à l'axe SF de la parabole, menées par les points P et A. Si l'on joint le milieu M de QR au milieu L de PA, par la droite ML, cette droite passera par le point O (n° 1), et sera parallèle à l'axe SF de la parabole (n° 5) ; ainsi, le point O est à des distances égales OG, OG′ des deux parallèles AE, PN. D'ailleurs, la droite PO, bissectrice de l'angle QPR des tangentes PQD′, PRD, divise en deux parties égales l'angle NPE (n° 5). De plus, la droite AO, prolongement de la normale au point A, est aussi la bissectrice de l'angle NAE : donc, la circonférence décrite du point O comme centre avec OG′ pour rayon, touchera les quatre côtés du quadrilatère NPEA, en des points G′, I, G, I′. L'égalité des tangentes FI′, FI donne FA + AG = FP — PG′ ; il en résulte que si l'on prend AK = AF et PH = PF, on aura GK = G′H, et par suite la droite HK sera parallèle à GG′, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de la parabole. La position de la droite HK est invariable, puisqu'elle passe par le point K. Donc, le point P appartient à une parabole dont le foyer est F, et qui a pour directrice la droite HKR′, parallèle à la directrice de la parabole donnée, à une distance du point A égale au rayon vecteur FA. Les directrices des deux paraboles sont à égales distances du point donné A, mais de différents côtés de ce point. Les deux courbes se coupent sous un angle droit au point A, car la normale AO, à l'une d'elles, est tangente à l'autre.

On trouvera, de même, que si la courbe donnée est une hyperbole, le lieu géométrique demandé est une ellipse dont les foyers seront ceux de l'hyperbole, et qui passera par le point donné sur cette hyperbole.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Par un point O *pris sur le prolongement d'un diamètre* BA *d'un cercle, on mène une sécante quelconque qui rencontre le cercle en deux points* M, M′ (fig. 74), *et de ces points on mène au centre* C *deux rayons* MC, M′C : *prouver que le produit de tang* $\frac{1}{2}$ MCA *par tang* $\frac{1}{2}$ M′CA *est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Au point O, élevez sur OC la perpendiculaire ODD′ qui rencontre en D et D′ les droites menées des points M, M′ à l'extrémité B du diamètre ACB. En prenant BO pour rayon, la droite OD sera la tangente de $\frac{1}{2}$ MCA, et OD′ la tangente de $\frac{1}{2}$ M′CA. Or, les quatre points M, M′, D, D′, appartiennent à une même circonférence, car les angles DD′M′, DMM′ sont supplémentaires. En effet, l'angle DD′M′, complément de M′BA, doit avoir pour mesure la moitié de l'arc BM′, il est donc égal à l'angle M′MB, qui est adjacent à l'angle DMM′. Puisque les quatre points M, M′, D, D′ sont situés sur une même circonférence, on a OD.OD′ $=$ OM.OM′ $=$ OA.OB; donc, tang $\frac{1}{2}$ MCA $\times$ tang $\frac{1}{2}$ M′CA $=$ OA $\times$ OB, quelle que soit la direction de la sécante OMM′.

Notes. On peut démontrer les théorèmes des nos 1 et 2 (p. 496, 497), au moyen des Propositions de la géométrie élémentaire.

1. Je suppose que le cercle inscrit dans le triangle ABC (*fig.* 75), touche la base BC au point D ; par ce point et le centre O du cercle, je mène le diamètre DOE ; puis, je joins le sommet A du triangle à l'extrémité E du diamètre DOE, par la droite AE dont le prolongement coupe la base BC au point D' : ce dernier point sera celui auquel le cercle tangent à la base BC et aux prolongements des deux autres côtés AB, AC, touche la base BC du triangle. C'est ce que nous allons d'abord démontrer.

J'élève sur BC, au point D', la perpendiculaire D'O'E' qui rencontre aux points O', E' les prolongements des droites AO, AD ; et je mène, des points O, O', des perpendiculaires OG, O'G' sur AB. Il en résulte $OG : O'G' :: AO : AO' :: OE : O'D'$. Mais $OG = OE$; donc, $O'G' = O'D'$; et par conséquent le point O' est le centre du cercle ex-inscrit au triangle ABC. Ce cercle touche la base BC au point D', puisque le rayon O'D' est perpendiculaire sur BC.

Maintenant, je dis que les droites MO, MO', menées du milieu M de BC aux centres O et O', passent par les milieux L, L' des droites AD, AD'. En effet, les tangentes BD, CD' sont, comme on sait, égales entre elles ; ainsi, le point M, milieu de BC, est le milieu de DD'. La droite MO divise en parties égales les côtés DD', DE du triangle DD'E : elle est donc parallèle à D'EA ; et par conséquent elle divisera DA en deux parties égales au point L. De plus, $D'O' = O'E'$, puisque $EO = OD$; donc, la droite O'M est parallèle à E'D ; il s'ensuit qu'elle partage en deux parties égales la droite AD' au point L'.

Je ferai encore observer que le produit des rayons OD, O'D' est égal au produit des tangentes BD, BD'. Car les triangles BOD, BO'D', semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, donnent la proportion OD:BD'::BD:O'D'.

2. La droite qui unit les milieux M, L des diagonales BC, AA' d'un quadrilatère ABCA' (*fig.* 76), circonscrit à un cercle, passe par le centre O de ce cercle.

En effet, inscrivez des cercles dans les triangles ABC, A'BC, ils toucheront la base commune BC en un même point D. Car, le quadrilatère étant circonscriptible, on a AC — AB = A'C — A'B; mais la différence AC — AB est égale à la différence des distances DC, DB des extrémités de la base BC du triangle ABC, au point de contact D de la base et du cercle inscrit, et il en est de même pour le triangle A'BC; donc, les cercles inscrits dans ces triangles toucheront la base commune au même point. Les diamètres DGE, DG'E' de ces deux cercles, menés par le point D, seront en prolongement l'un de l'autre, sur une perpendiculaire à la droite BC. Les deux droites AE, A'E' couperont la base BC en un même point D', qui sera le point de contact de la base BC et des cercles ex-inscrits aux deux triangles (note 1). Enfin, si l'on prolonge les deux droites AD, A'D, jusqu'à ce qu'elles rencontrent en des points F, F' la perpendiculaire élevée sur BC au point D', les droites D'F, D'F' seront les diamètres des cercles ex-inscrits aux triangles ABC, A'BC, et qui touchent la base BC au point D'.

Cela posé, on aura D'F':DE::D'F:DE', car les produits DE × D'F, DE' × D'F' sont égaux entre eux, puisque chacun d'eux est égal à 4.BD.BD' (note 1); il s'ensuit HF':HD :: FH': H'D, et par conséquent la droite HH' est parallèle à F'F et à E'E. Le milieu de cette droite HH' sera le centre O du cercle inscrit dans le quadrilatère ABCA', car les bissectrices AG, A'G' des angles BAC, BA'C, divisant en deux parties égales les diamètres DE, DE', devront passer par le milieu de HH'. La ligne D'C étant égale à BD, le point M, milieu de BC, est milieu de D'D. Ainsi, les trois points M, O, L sont les milieux des diagonales D'D, H'H, A'A du quadrilatère complet H'D'HDA'A. Donc, ces trois points sont en ligne droite. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.