NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème sur le produit de deux polynomes, d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 47-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__47_1>

THÉORÈME

SUR LE PRODUIT DE DEUX POLYNOMES.

D'après M. Gauss (*).

LEMME. La somme $\frac{A}{\alpha^p a} + \frac{B}{\alpha^{p-1} b} + \frac{C}{\alpha^{p-2} c} + \ldots\ldots$ est toujours fractionnaire, ayant α^p comme facteur au dénominateur commun; on suppose A, B, C ..... a, b, c ..... des nombres entiers premiers avec le nombre entier α. Les exposants de α sont entiers et positifs.

Démonstration. Réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{Abc\ldots\ldots + \alpha Bac\ldots\ldots + \alpha^2 Cab\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\alpha^p abc\ldots\ldots}.$$

Or, le numérateur n'est pas divisible par α, donc le facteur α^p reste au dénominateur.

THÉORÈME. Le produit de deux polynômes, ordonnés suivant la même variable, à exposants entiers et positifs, à coefficients réels, mais pas tous entiers, donne un troisième polynôme, dont les coefficients ne sont pas tous entiers; on

---

(*) Disquisitiones arithmeticæ, sect. 1, § 42.

suppose que les coefficients de la plus haute puissance de la variable dans les deux polynômes sont égaux à l'unité.

Démonstration. Soient les deux polynômes

$$x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \ldots\ldots A_r x^{p-r} + \ldots\ldots \quad (P)$$

$$x^q + B_1 x^{q-1} + B_2 x^{q-2} + \ldots\ldots B_s x^{q-s} + \ldots\ldots \quad (Q)$$

p et q sont des nombres entiers positifs ; r n'est jamais supérieur à p, ni s supérieur à q. Les coefficients A_1, A_2, A_3 ..... B_1, B_2, B_3 ..... sont réels, mais tous ne sont pas entiers.

Soit α un nombre premier facteur d'un des dénominateurs qui se trouvent dans (P); réunissant tous les termes où α est à la plus haute puissance, et parmi ces termes prenons celui où x a le plus haut exposant ; soit t la plus haute puissance de α et $p-r$ le plus haut exposant de x; de sorte que $A_r = \frac{N}{\alpha^t M}$; N et M étant des nombres entiers premiers avec α ; dans tous les termes qui précèdent A_r, α sera élevé à une puissance moindre que t; et dans ceux qui suivent, α ne pourra avoir un exposant supérieur à t; dans le polynôme $\frac{Q}{\alpha}$, le coefficient du premier terme est $\frac{1}{\alpha}$; ainsi il y a au moins un coefficient qui a α comme facteur au dénominateur. Soit $\alpha^{t'}$ la plus haute puissance de α qu'on rencontre dans $\frac{Q}{\alpha}$, et $q-s$ le plus haut exposant de x, où cette rencontre a lieu ; on aura donc $\frac{B_s}{\alpha} = \frac{N'}{\alpha^{t'} M'}$; M' et N' sont des nombres premiers avec α ; dans les termes précédents, α s'élève à une puissance moindre que t' et ne surpasse pas t' dans les termes suivants ; dans le produit des polynômes $P.\frac{Q}{\alpha}$, on obtient d'abord le terme $\frac{NN'}{\alpha^{t+t'} MM'}$, coefficient de $x^{p+q-r-s}$, et $t+t'$ n'est point inférieur à 2. Pour avoir les autres coefficients qui répondent à la même puissance, il faut prendre un terme qui précède x^{p-r} et le multiplier par un terme qui suit x^{q-r} et *vice versâ*; donc dans ces coefficients, α s'élève à une puissance moindre que $t+t'$; et, en vertu du lemme, la somme de ces coefficients renferme $\alpha^{t+t'}$ comme facteur au dénominateur; donc dans le produit P.Q, la puissance $\alpha^{t+t'-1}$ entrera comme facteur dans le coefficient $x^{p+q-r-s}$; donc, ce coefficient est fractionnaire. C. Q. F. D.

Observation. La même démonstration s'applique aux polynômes dont les coefficients des premiers termes ne sont pas égaux à l'unité, pourvu que tous les coefficients de Q ne soient pas divisibles par α^t.

Corollaire. Le théorème subsiste, sous les mêmes conditions, pour un nombre quelconque de polynômes; et par conséquent pour des polynômes égaux. Donc, un polynôme à une variable, ayant un ou plusieurs coefficients fractionnaires, étant élevé à une puissance entière positive, donne pour résultat un polynôme ayant au moins un coefficient fractionnaire.

Tm.