NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES MARCOU

Note relative à un théorème sur la cissoïde, lieu géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 472-474

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__472_0>

NOTE RELATIVE A UN THÉORÈME

sur la Cissoïde, lieu géométrique (t. II, p. 488).

PAR M. JULES MARCOU,
élève du collége de Besançon.

M. Terquem, dans une note à la fin de ce théorème, fait la remarque suivante. « Lorsque R devient négatif, les circonférences se touchent intérieurement, et n'ont qu'une tangente commune, toutefois la cissoïde reste réelle ; que signifie-t-elle alors ? » Pour trouver cette signification, il faut généraliser ainsi l'énoncé du problème.

Soient deux circonférences qui se touchent en un point fixe, l'une de ces circonférences est donnée de position et de grandeur, l'autre est d'un rayon variable ; prenons le centre de similitude autre que le point de contact (qui est direct, lorsque les deux cercles se touchent extérieurement, et inverse lorsqu'ils se touchent intérieurement) ; de ce centre, menons le rayon *moyen* (*) ; et cherchons les lieux géométriques des extrémités de ce rayon moyen dans les deux circonférences. Pour la circonférence fixe ce lieu est évidemment la circonférence elle-même, et pour la circonférence variable le lieu est une cissoïde.

Si les deux circonférences se touchent extérieurement, on

(*) Prenons un point quelconque sur le diamètre d'une circonférence donnée, de ce point comme pôle menons des rayons vecteurs à la circonférence ; cela posé, je désigne sous le nom de rayon moyen, le rayon vecteur qui fait le plus grand angle aigu avec le diamètre fixe ; lorsque le point est intérieur, le rayon moyen est perpendiculaire au diamètre ; lorsque le point est extérieur, le rayon moyen est tangent à la circonférence.

a le problème que j'ai discuté ; je vais résoudre la seconde partie du problème, lorsque les circonférences se touchent intérieurement.

Je prendrai pour inconnue la distance du point de contact au centre de similitude inverse ; les calculs sont plus rapides qu'en suivant la méthode que j'ai employée pour résoudre la première partie ; que l'on peut aussi résoudre plus simplement en prenant pour inconnue la distance du point de contact des deux cercles, au centre de similitude directe.

Conservant les mêmes notations que dans la première partie, *fig.* 60, les deux triangles semblables ACD, BC'A me donnent

$$R : \alpha :: C'A : CA$$
$$R + \alpha : R - \alpha :: \alpha : AC$$
$$2R : OA :: R + \alpha : \alpha,$$

d'où

$$OA \text{ ou } x'' = \frac{-2R\alpha}{R + \alpha};$$

combinant cette valeur de x'' avec l'équation du cercle C', qui est $y^2 + x^2 + 2\alpha x = 0$, il vient $y''^2 = \frac{4R\,\alpha^3}{(R+\alpha)^2}$; éliminant α entre cette équation et la valeur de x'', on aura une équation qui représentera le lieu des points *m*. De x'', je tire

$$\alpha = \frac{-Rx}{2R + x};$$

substituant cette valeur de α dans y'', il vient l'équation de la cissoïde

$$y^2 = \frac{-x^3}{2R + x}.$$

Si on veut avoir le lieu des points *m'*, il faut combiner la valeur de x'' avec l'équation du cercle C, qui est $y^2 + x^2 +$

$2Rx = 0$, puis èliminant α comme précédemment, on trouve l'équation du cercle C.

Si R est aussi variable, et qu'on donne entre α et R la relation

$$\alpha : R :: m : 1 \quad \text{ou} \quad \alpha = mR,$$

il viendra, pour le lieu géométrique des points de contact au cercle α, l'équation $y = \pm \sqrt{m}.x$, qui représente deux droites passant par l'origine; pour le cercle R, on trouve aussi deux droites passant par l'origine.