NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PEYRONNY

Aire de l'ellipsoïde allongé

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 466-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__466_0>

AIRE DE L'ELLIPSOIDE ALLONGÉ

(*V.* t. I, p. 480),

PAR M. A. PEYRONNY,
élève interne du collége de Saint-Louis (classe de M. Vincent)

—

Considérons la branche AM'B (*fig.* 64) d'une ellipse ayant pour grand axe la ligne $OA = a$ et pour petit axe la ligne $OB = b$; cette branche, en tournant autour de l'axe OA, engendrera la moitié de la surface d'un ellipsoïde de révolution; je représente par S cette surface, qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que nous ayons divisé l'arc AD du cercle principal circonscrit en un très-grand nombre l de parties égales, dont je représente la valeur commune par k; k aura pour valeur $\frac{\pi a}{2l}$ et deviendra, quand l sera infini, l'élément du cercle, en un certain point M.

Soit K' l'élément de l'ellipse qui correspond au point M', ayant même abscisse OP; menons par les points M et M' deux tangentes qui viendront couper l'axe OA en un même point C, et représentons par m la tangente de l'angle $MCO = MOD = \alpha$, nous aurons

$$k' = k\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} = \frac{\pi}{2}a\frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} \text{ (v. p. 233).}$$

La demi-surface de l'ellipsoïde est égale à la somme des surfaces élémentaires engendrées par les éléments de la branche

AM'B. Soit s la surface correspondante à l'élément k', il viendra

$$s = 2\pi.\mathrm{M'P}.k' = \pi^2 a\mathrm{M'P}.\frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} =$$

$$= \pi^2 ab.\frac{1}{l}\cos\alpha\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} = \pi^2\,\frac{ab}{l}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}m^2+1},$$

car on a

$$\mathrm{M'P} = \mathrm{MP}.\frac{b}{a} = a\cos\alpha.\frac{b}{a} = b\cos\alpha.$$

Représentons par p et q le sinus et le cosinus de l'angle α, posons $\frac{b^2}{a^2} = r^2 = \cos^2\theta$, ce qui est possible, puisque b est $< a$, et désignons par Σs la somme de toutes les surfaces élémentaires, nous aurons

$$\frac{1}{2}\mathrm{S} = \Sigma s = \Sigma\pi^2.ab\frac{q}{l}(p^2r^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = \pi^2 al.\Sigma\,\frac{q}{l}\ldots\ldots$$

$$\left\{pr + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2}{r} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^4}{r^3} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}}{r^{2n-1}}\right\} =$$

$$= \pi^2 ab\Sigma.\frac{1}{l}\left\{pqr + q\,\frac{\mathrm{tang}\theta}{\sin\theta}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}2p^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}\frac{q^4}{r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. ..+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}\,p^{2\left(\frac{1}{2}+1\right)}\frac{q^{2n}}{r^{2(n-1)}} + \ldots\right]\right\} + \text{etc.}\Big\}$$

Cette expression devient, en posant $t = \mathrm{tang}\,\theta$ et remarquant que $r^2 = \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{1}{2}S=\pi^2ab\Sigma.\frac{1}{l}\left\{pqr+\frac{t}{\sin\theta}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4(1+t^2)+\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2.\dots.n}p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}(1+t^2)^{n-1}+\dots\text{ etc.}\right]\right\}.$$

$$\frac{1}{2}S=\pi^2ab.r\Sigma\frac{pq}{l}+$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4\dots\dots\right]t+\\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2.\dots.n}p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+\right.\\ +\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{1.2.\dots.(n+1)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\right.\\ +\text{etc.}\dots\end{array}\right.$$

$$+\Sigma.\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4+2.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^6+3\dots\right]t^3$$

$$\left.+n\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{1.2.\dots.(n+1)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}\dots\right]t^{2n-1}$$

$$\left.+(n+1)\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{1.2.\dots.(n+2)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+2)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\dots\right]t^{2n+1}$$

Représentons par T_{2n-1} et T_{2n+1} les coefficients des deux termes consécutifs qui contiennent t aux puissances $(2n-1)^{\text{ème}}$ et $(2n+1)^{\text{ème}}$, nous aurons

$$\mathrm{T}_{2n+1}+\mathrm{T}_{2n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{1.2\ldots\ldots n}.\Sigma\frac{q}{l}$$

$$\left[p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+\left(\frac{1}{2}-n\right)p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{2}\right.$$

$$\left.p^{2\left(\frac{1}{2}-n-2\right)}q^{2(n+2)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n-1\right)\left(\frac{1}{2}-n-2\right)}{1.2.3}\ldots\right],$$

et remarquant que la quantité entre parenthèse revient à

$$p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}-n}q^{2n}-p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n},$$

ou à q^{2n}, en vertu de la relation $p^2+q^2=1$,

$$\mathrm{T}_{2n+1}+\mathrm{T}_{2n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}\Sigma\frac{q^{2n+1}}{l},$$

$\Sigma\frac{q^{2n+1}}{l}$ représente la somme des $(2n+1)^{ème}$ puissances de tous les cosinus des angles compris entre 0 et 90°, divisée par le nombre des angles, et l'on sait qu'elle a pour valeur

$$\frac{1.2.\ldots\ldots n}{1.3.\ldots\ldots(2n+1)}.\frac{2^{n+1}}{\pi};$$

il viendra alors, en simplifiant,

$$\mathrm{T}_{2n+1}+\mathrm{T}_{2n-1}=\frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)}\times\frac{1}{\pi},$$

d'où

$$\mathrm{T}_{2n+1}=\frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)}\times\frac{1}{\pi}-\mathrm{T}_{2n-1},$$

le signe $+$ correspondant au cas où n est impair et le signe $-$ à celui où n est pair.

Revenons maintenant à la valeur de $\frac{1}{2}\mathrm{S}$, nous avons

$$\Sigma\frac{pq}{l}=\Sigma\frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{l}=\frac{1}{2}\Sigma\frac{\sin 2\alpha}{l}=\frac{1}{\pi},$$

$$\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^4+\ldots\text{ etc.}\right]=$$

$$=\Sigma.\frac{q}{l}\left[(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}-p\right]=\Sigma\frac{q-pq}{l}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi},$$

il viendra alors

$$\frac{S}{2}=\pi^2ab\left\{\begin{array}{l}\frac{r}{\pi}+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\pi}.t+\left(\frac{2}{1.3}-1\right).\frac{1}{\pi}.t^3+\right.\\ \left.+\left(-\frac{2}{3.5}-\frac{2}{1.3}+1\right)\frac{1}{\pi}t^5+\ldots\right]\end{array}\right\}$$

$$=\pi ab\left\{\begin{array}{l}r+\frac{1}{\sin\theta}\left[t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}t^{2n-1}+\right.\\ \left.+\left(\pm\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\mp\frac{1}{(2n-1)}\right)t^{2n+1}+\ldots\right]\end{array}\right\}$$

$$=\pi ab\left\{r+\frac{1}{\sin\theta}\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots\pm\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\mp\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\pm\ldots\right)\right\},$$

r est le cosinus de l'angle θ, t la tangente; alors la série qui est multipliée par $\frac{1}{\sin\theta}$ représente le développement de l'arc θ en fonction de sa tangente; nous aurons ainsi définitivement

$$\frac{S}{2}=\pi ab\left\{\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right\},$$

ou

$$S=2\pi ab\left\{\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}.$$

Note. Cette belle méthode, qu'il serait facile d'abréger, est analogue à celle que Wallis employait, avant l'invention du calcul intégral, pour la quadrature des aires; le calcul suivant fait ressortir l'immense avantage des nouveaux calculs.

1° *Aire de l'ellipsoïde allongé*. On a pour expression intégrale de cette aire

$$2\pi \frac{b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-c^2x^2} = \pi \frac{b}{a^2}$$

$$\left(x\sqrt{a^4-c^2x^2}+\frac{a^4}{c}\,\text{arc tang}\,\frac{cx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}\right),$$

faisant $x=a$ et doublant le résultat, on a pour la surface totale $2\pi ab\left(\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$; lorsque $a=b$, alors $\theta=0$ et $\frac{\theta}{\sin\theta}=1$; l'aire devient $4\pi a^2$, qui est celle de la sphère.

2° *Aire de l'ellipsoïde aplati.*

$$2\pi \frac{a}{b^2}\int dy\sqrt{b^4+c^2y^2} = \pi \frac{a}{b^2}$$

$$\left[C+y\sqrt{b^4+c^2y^2}+\frac{b^4}{c}\log\left(cy+\sqrt{b^4+c^2y^2}\right)\right].$$

Si on détermine la constante pour que l'intégrale soit nulle pour $y=0$, on obtient $C=-\frac{b^4}{c}\log b^2$, faisant ensuite $y=b$ et doublant le résultat, on obtient pour l'aire totale de l'ellipsoïde aplati

$$2\pi ab\left[\text{séc}\,\theta+\cot\theta\log\text{tang}\,45^\circ+\frac{1}{2}\theta\right].$$

(*V*. t. I, p. 524); faisant $a=b$, on a

$$\theta=0,\quad \text{séc}\,\theta=1,\quad \frac{\log\text{tang}\,45^\circ+\frac{1}{2}\theta}{\text{tang}\,\theta}=\frac{0}{0}.$$

La dérivée du numérateur est $\frac{1}{\sin(90^\circ+\theta)}$ et celle du dénominateur est $\frac{1}{\cos^2\theta}$; donc ce rapport est égal à l'unité. Ainsi l'aire devient $4\pi a^2$, qui est encore celle de la sphère. (*V*. Moigno, t. II, p. 160.) Tm.