NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TRIAU

Problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 461-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__461_0>

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE.

PAR M. TRIAU,
élève de l'Institution Goudounèche.

—

Étant donnés un cercle et trois points dans le plan de ce cercle, y inscrire un triangle dont les côtés passent par les trois points.

Avant de résoudre ce problème général, qui, pris à part, offre de grandes difficultés, et que les plus illustres géomètres n'ont pas regardé comme indigne de fixer leur attention, je vais donner la solution d'un autre problème assez facile, et duquel le premier se déduira immédiatement. En voici l'énoncé :

Étant donnés un cercle et deux points pris hors de ce cercle, par ces deux points mener deux sécantes qui se coupent sur la circonférence, et telles que la ligne de jonction de leurs deux autres points d'intersection avec la circonférence soit parallèle à une ligne donnée.

Soit O le centre du cercle donné (*fig.* 65), A et B le deux points donnés et MN la ligne donnée ; supposons le problème résolu et soient IA et IB les deux droites cherchées, alors DC est parallèle à MN. Par le point D, je mène DG parallèle à AB, et je joins le point G au point C par une droite GK, qui coupe AB au point K. Si la ligne KG était connue, il est clair que tout le serait ; or je peux déterminer la ligne KG au moyen des seules données de la question.

En effet, KAC et IAB sont semblables comme équiangles, car l'angle en A est commun, l'angle $\widehat{CKA} = \widehat{CGD}$ comme alternes internes ; or $\widehat{CGD}$ et $\widehat{CID}$ sont égaux comme étant tous les deux compris dans le même segment CD ; donc $\widehat{CKA} = AIB$. Nous aurons donc

$$AK = \frac{AC \times AI}{AB}.$$

Mais le produit de chaque sécante partant d'un même point, par sa partie extérieure, étant une quantité constante, il s'ensuit que $AC \times AI$ est connu, par conséquent le point K est déterminé.

Nous avons donc déjà un point de la ligne KG ; de plus, l'angle $\widehat{GDC}$ est égal à l'angle ABM, qui est connu, donc nous connaissons la corde GC, et par conséquent la droite GK est déterminée, puisque c'est une sécante passant par un point donné et dont la partie interceptée par la circonférence est connue.

La ligne GK étant connue, je mène une parallèle à AB par le point G ; cette parallèle va couper la circonférence en un autre point D, qui est par conséquent déterminé, ainsi que le point C. Alors je connais deux points de chacune des sécantes demandées, le problème est donc résolu.

D'après la manière dont j'ai traité le problème, on pourrait être porté à croire qu'il est nécessaire, pour que les deux sécantes aillent se couper sur la circonférence, de joindre le point A au point C et le point B au point D ; mais cela serait une erreur, car si je joins le point A au point D et le point B au point C (*fig.* 65 bis), je dis que les deux sécantes se couperont encore sur le cercle. En effet, les deux triangles ADK et AIB sont semblables, car l'angle en A est commun, et nous avons de plus $AK = \frac{AI \times AD}{AB}$ ou bien

$$AK : AD :: AI : AB.$$

Donc l'angle IBA doit être égal à l'angle ADK, or IBA=BCG; donc ABK=BCG; donc le point I doit se trouver sur la circonférence.

Ce problème résolu, celui que nous avons à traiter va s'en déduire immédiatement.

Fig. 65 (*ter*). Soit un cercle dont le centre est en O et trois points A, B, C. Supposons le problème résolu et soit IML le triangle demandé, je joins le point A au point B, et, par le point L, je mène une parallèle LG à la droite AB; je mène la droite IG, qui va couper la droite AB en K. Il est clair que si nous pouvions déterminer le point K, le problème serait résolu, car il se trouverait ramené au problème que nous venons de traiter.

Or, pour déterminer le point K, nous nous y prendrons comme dans le problème précédent pour déterminer le même point, car il jouit tout à fait des mêmes propriétés. En effet, les deux triangles IBK et ABM sont semblables par la même raison que dans le problème ci-dessus; donc nous aurons, à cause de cette similitude,

$$BK : BI :: BM : AB,$$

ou

$$BK = \frac{BI \times BM}{AB}.$$

Or $BI \times BM$ est connu, nous connaissons aussi AB; donc le point K est connu. Le problème est donc ramené au suivant: *Étant donnés deux points* K *et* C, *mener par ces deux points deux sécantes* KG *et* CL *qui se coupent en* I *sur le cercle, et de manière que la ligne* GL *soit parallèle à* AB, problème qui ne diffère en rien de celui qu'on a traité ci-dessus.

Par là, nous déterminons deux sommets I et L du triangle, le problème est donc résolu.

Note. Pappus résout le problème où il s'agit d'inscrire dans une circonférence un triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés en ligne droite (lib. 7, prop. CXVII). Il ramène ce problème à celui-ci : *Inscrire dans une circonférence un triangle dont deux côtés passent par deux points donnés et dont le troisième côté soit parallèle à la droite qui réunit les deux points donnés* (lib. 7, prop. CVII). Gabriel Cramer, l'auteur des formules de ce nom (*V*. t. I, p. 125), généralisant ce problème pour trois points de position quelconque, le proposa à M. de Castillon (*), très-versé dans la géométrie des anciens ; Castillon en donna une solution synthétique, déduite du problème de Pappus, que nous venons d'énoncer ; elle est insérée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, 1776. La même année et dans le même recueil, Lagrange en donna une solution analytique très-simple, elle est fondée sur ce théorème : Si dans un triangle isocèle, on mène du sommet une droite quelconque à la base, cette droite, plus un des côtés, est à cette droite, moins un des côtés, comme l'unité est au produit des tangentes des demi-angles que forme cette droite avec les côtés ; menant du centre du cercle trois droites aux points donnés et trois rayons aux sommets du triangle supposé construit, ce triangle sera partagé en trois triangles isocèles ; prenant pour inconnues les angles que forment les rayons avec les droites, on aura en tout trois inconnues, et le théorème appliqué à chaque triangle fournit trois équations entre les produits des tangentes des angles inconnus, dont on tire facilement les inconnues. Mais la construction est moins élégante que celle qui a été donnée géométriquement d'abord par Annibale Giordano di Ottaiano, jeune Napolitain, et ensuite par Malfatti, dans la collection intitulée : *Memorie*

(*) Jean-François Salvemini, né en 1709 à Castiglione, en Toscane : d'où il a pris son nom ; professeur à l'Ecole d'artillerie et membre de l'Academie de Berlin, auteur de plusieurs traductions ; mort en 1791.

di fisica e di matematica della societa italiana , t. IV.

Ces solutions sont générales et comprennent des polygones quelconques; on les trouve légèrement modifiées dans les Éléments d'analyse géométrique de Simon Lhuilier (1809), p. 280; nous en avons extrait ce qui précède. De là, ces solutions ont passé dans plusieurs recueils. — M. Servois a construit les mêmes problèmes pour les coniques en général, et en ne faisant usage que de la règle (*Ann. de Gergonne*, t. I, p. 357, 1810). C'est à cette occasion que ce savant géomètre a introduit la dénomination de *pôle d'une droite*. M. Poncelet s'est aussi occupé à diverses reprises de ce problème dans le recueil cité et dans les *Propriétés projectives* (p. 349); les constructions sont basées sur les théorèmes de Braickenridge et de Maclaurin relatifs aux polygones dont les côtés pivotent sur des points fixes, tandis que les sommets parcourent des lignes données.

A l'aide de la magnifique théorie des polaires réciproques, dont on doit aussi le développement à M. Poncelet, le problème de la circonscription des polygones dont les sommets doivent se trouver sur des droites données se ramène au problème de l'inscription, et *vice versâ*. On sait d'ailleurs que la polaire d'une conique, prise par rapport à un cercle décrit d'un foyer comme centre, est un second cercle; par là, les problèmes d'inscriptions et de circonscriptions de polygones dans les coniques se ramènent aux problèmes analogues dans le cercle. Il suffit donc de savoir résoudre ce genre de problèmes pour le cercle seulement.

On a lieu d'être surpris qu'une doctrine si facile, si abréviatrice, si riche en applications, n'ait pas encore trouvé place dans l'enseignement classique. Toutefois, s'il le fallait, j'en dirais la raison. Tm.