NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE MATHIEU

Théorème sur les médianes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 457-460

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__457_1>

THÉORÈME SUR LES MÉDIANES.

PAR M. MATHIEU (AUGUSTE),
élève du collége Stanislas.

Si on mène les trois médianes d'un triangle rectiligne quelconque :

1° On pourra toujours avec ces trois lignes construire un triangle;

2° La surface de ce triangle sera égale aux $\frac{3}{4}$ de la surface du triangle proposé.

3° Les médianes de ce triangle seront respectivement égales aux $\frac{3}{4}$ des côtés du triangle proposé (*).

(*) Ce théorème est de M. Gergonne (Annales, t. II, p. 88-94).

Soit ABC (*fig*. 62), un triangle quelconque, CQ, AP deux médianes; par le point C je mène une parallèle à AP, jusqu'à la rencontre de OB en D et je tire AD, je dis que AD est parallèle à CQ : en effet dans le triangle CBD, OP est parallèle à la base et passe par le milieu de BC, donc le point O est le milieu de BD; donc dans le triangle BAD, OQ passe par les milieux des deux côtés BD et AB est parallèle à la base. Ainsi la figure OCDA est un parallélogramme, ce qui démontrerait, si déjà cela ne l'était pas, que les médianes d'un triangle concourent en un même point et se coupent en leurs tiers à partir de la base.

De ce que la figure OCDA est un parallélogramme, il résulte que CD = OA, d'ailleurs OD = OB, donc le triangle OCD qui est toujours possible, a ses côtés respectivement égaux aux $\frac{2}{3}$ des médianes du triangle ABC, donc 1°, etc.

D'après ce que je viens de dire, le triangle formé avec les médianes du triangle ABC est semblable au triangle OCD et le rapport des côtés est $\frac{3}{2}$, par conséquent en désignant par s la surface du triangle en question, j'ai $s = \frac{9}{4}$ OCD; mais le triangle OCD, est équivalent au triangle AOC et le triangle AOC est le tiers du triangle ABC, puisque ces deux triangles ont même base AB et que la hauteur du second est triple de celle du premier, donc en désignant par S la surface du triangle ABC, j'aurai OCD $= \frac{1}{3}$ S et par suite $s = \frac{3}{4}$ S, donc 2°, etc.

Dans deux triangles semblables, les médianes sont proportionnelles et leur rapport est égal à celui des côtés; si donc je fais voir que dans le triangle OCD, les médianes sont égales aux moitiés des côtés du triangle ABC, il sera prouvé que dans le triangle construit avec les médianes de ABC, les médianes sont les $\frac{3}{4}$ des côtés de ABC ; or $CR = \frac{1}{2} AC$; comme le point O est le milieu de BD, si on joint ce point au milieu de CD, la droite de jonction sera la moitié de BC ; enfin si l'on joint le point D au milieu M de OC, comme $OC = AD = 2AQ$, la figure MDAQ est un parallélogramme et $MD = AQ = \frac{1}{2} AB$, donc 3°, etc.

On voit par ce qui précède que si, considérant un triangle, on mène les trois médianes, qu'avec ces trois médianes on construise un second triangle, qu'avec les médianes de ce second triangle, on en construise un troisième, et qu'on continue ainsi indéfiniment, les surfaces de ces triangles successifs seront les termes de la progression géométrique décroissante

$$S, \frac{3}{4} S, \frac{3^2}{4^2} S \ldots\ldots$$

S étant la surface du triangle duquel on part; on voit aussi que tous les triangles de rang impair seront semblables entre eux, ainsi que tous les triangles de rang pair.

On peut encore remarquer que les sommes des carrés des côtés de ces triangles suivent aussi une progression géométrique décroissante dont la raison est encore $\frac{3}{4}$; car en partant du théorème de la médiane, on reconnaît facilement que dans un triangle quelconque, la somme des carrés des médianes est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

Comme applications du théorème démontré, je vais donner la solution d'un problème et la démonstration de deux théorèmes, par rapport au triangle équilatéral.

Problème. Construire un triangle dont on connaît les trois médianes.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'avec les trois lignes données on puisse former un triangle; cette condition étant remplie, on mène les médianes de ce triangle, et prenant des lignes égales aux $\frac{4}{3}$ de ces médianes, on a les côtés du triangle cherché; donc lorsque le problème est possible, il n'admet qu'une seule solution.

De la solution de ce problème on peut conclure que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les médianes égales, chacune à chacune.

Théorème. Le triangle équilatéral est de tous les triangles dans lesquels la somme des médianes étant constante, le maximum est une surface.

Car dans ce triangle maximum, la surface du triangle formé avec les médianes devra être aussi un maximum, puisqu'elle est égale aux $\frac{3}{4}$ de la surface de ce triangle; mais la somme des médianes est donnée; donc ces médianes doivent être égales, or il est facile de voir que lorsque les trois médianes d'un triangle sont égales, ce triangle est équilatéral, donc le triangle maximum est équilatéral.

Théorème. Le triangle équilatéral est de tous les triangles égaux en surface, celui dans lequel la somme des médianes est un minimum.

Car si l'on considère le triangle dans lequel la somme des médianes est un minimum, comme la surface de ce triangle est donnée, celle du triangle formé avec les médianes, le sera aussi; donc la somme de ces médianes ne peut être un minimum, qu'autant qu'elles sont égales entre elles; donc le triangle dont il s'agit est équilatéral.