NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON (DE CHAMP)

Sur les courbes parallèles à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 442-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__442_1>

SUR LES COURBES PARALLÈLES A L'ELLIPSE (*),

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingenieur des ponts et chaussées.

Parmi les formes courbes que les arts empruntent à la géométrie, on distingue particulièrement l'*ovale*, forme qui, sans être entierement arbitraire, n'est cependant pas définie d'une manière précise. La détermination d'un type des figures ovales étant, au fond, une affaire presque tout entière de goût, il n'est nullement étonnant que rien ne soit

(*) *Voir* De lineis et superficiebus æquidistantibus. Dissertatio inauguralis Michaelis Reiss. Gottingue 1826, in-4°. — Kaestner, Comm. soc. Gottin., t. XI. — Crelle, 1822, t. II, p 203. Tm.

arrêté sur ce point. Monge semble néanmoins avoir voulu résoudre la question, en désignant l'ellipse comme la courbe la plus gracieuse et la plus élégante, sentiment que l'autorité de ce grand maître, appuyée de la beauté réelle de l'ovale elliptique, n'a pu faire prévaloir dans la pratique. D'une part, il est douteux que les jeunes générations initiées à la géométrie des sections coniques le partagent exclusivement; nous sommes moins attachés que les anciens à certaines idées de perfection qu'ils se faisaient de quelques courbes, et que la généralité des conceptions modernes affaiblit de jour en jour. Cette espèce de culte qu'ils professaient surtout pour le cercle a dû s'étendre naturellement à l'ellipse, qui s'y rattache si étroitement, qui est après lui, en un mot, la plus connue et la plus populaire de toutes les courbes; mais s'il se retrouve aujourd'hui quelque part, c'est assurément moins que jamais chez ceux qu'éclaire la saine théorie. D'un autre côté, il est certain que la pratique du tracé de l'ellipse, notamment dans les arts de construction, n'a point encore été franchement adoptée, même par les élèves de l'école polytechnique, disciples directement ou par la tradition du célèbre Monge.

Cette déchéance s'explique, au moins en partie, par les difficultés de tracé que l'on imagine être inhérentes aux courbes continues autres que le cercle. Des constructeurs géomètres, à la tête desquels je dois citer Prony, ont cherché à les vaincre; d'autres ont, au contraire, essayé de perfectionner les méthodes, nombreuses aujourd'hui, du tracé des *anses de panier*, courbes composées d'une suite d'arcs de cercle tangents entre eux; tentatives inspirées généralement moins par le désir de trouver des procédés usuels plus faciles que par le besoin d'offrir aux yeux d'un public plus familiarisé avec l'aspect des monuments, des formes irréprochables.

Mais ces difficultés, qu'une opinion généralement accréditée persiste à vouloir éviter, ne sont pas l'objet réel de la question; fussent-elles levées, je ne crois pas que l'ellipse serait davantage adoptée comme type de la forme ovale. En effet, les deux axes de cette courbe suffisent pour la déterminer entièrement, tandis que dans les arts, il convient presque toujours, après avoir fixé la position des sommets, de disposer de la courbure en ces points, chose impossible avec une ligne du second ordre. Le tracé de l'ovale manque donc, tant que l'on s'en tient à l'ellipse, de certaines conditions essentielles, ce qui a été remarqué déjà par M. Picot, ingénieur des ponts et chaussées (*); il a exprimé le défaut de cette courbe en disant que « les cordes parallèles au » grand axe décroissent trop rapidement de cet axe au som- » met. » A son exemple, je vais tâcher d'indiquer, en remplacement de l'ovale elliptique, une autre courbe d'un degré plus élevé, mais en m'imposant comme condition de la rattacher par sa construction à l'ellipse même d'une maniere assez simple pour que la notion nouvelle complète l'ancienne sans effort. La solution ainsi obtenue laissera peut-être quelque chose à désirer, n'ayant point à ma disposition de courbe d'un degré supérieur dont les propriétés soient assez saillantes pour que leur étude, en vue des applications dont il s'agit ici, pût être utile à l'enseignement sans le surcharger; persuadé d'ailleurs qu'à moins de combler une grande lacune ou de se présenter avec un attirail de propositions capables soit d'exciter un légitime intérêt, soit de piquer

(*) Annales des ponts et chaussées, 1832, 2e trimestre, p. 151. — La courbe qu'il indique s'obtient en donnant pour ordonnée à l'abscisse du point de la circonférence de rayon a, l'ordonnee de l'ellipse concentrique (b,c), au point qui se trouve sur le rayon mené de l'origine à la circonférence. L'équation est $a^2c^2y^2+b^2c^2x^2-(c^2-b^2)x^2y^2=a^2b^2c^2$. Le rapport des rayons de courbure principaux est le même que dans l'ellipse (a,b), il se réduit à $\frac{a^3}{b^3}$.

vivement la curiosité, une théorie quelque peu compliquée s'oublie bien vite, je préfère me servir de théories déjà établies, que leur application à un grand nombre d'objets a fait regarder comme indispensables.

Ce qui vient d'être dit était nécessaire pour préciser les termes du problème; on voit maintenant à quel point de vue nous considérons les courbes *parallèles* à l'ellipse : il s'agit de faire connaître un type des figures ovales qui puisse remplacer l'ellipse dans les arts.

1. — Portons sur chaque normale de l'ellipse une même longueur, le lieu géométrique des points ainsi obtenus formera une courbe jouissant de cette propriété que : *la normale en chacun de ses points est normale à l'ellipse.*

Soient, en effet, deux normales ni, $n'i$ menées par les points n, n' de l'ellipse et se rencontrant en i; m, m' les deux points correspondants de la courbe *parallèle;* menons les sécantes mm', nn' et prolongeons-les jusqu'à leur point de rencontre j; on a, au moyen du théorème connu qui sert de fondement à la théorie des transversales,

$$\frac{jm}{jn} = \frac{m'm}{n'n} : \frac{m'i}{n'i}.$$

Supposons maintenant que le point n' s'approche de n, les sécantes nj, mj tendront à devenir tangentes aux deux courbes; en même temps, le second membre de l'égalité ci-dessus converge vers l'unité, car, à cause de l'hypothèse $mn = m'n$, on a

$$\frac{in}{in'} = 1 : \frac{jn}{jn'},$$

d'où il suit que les triangles inn', imm' peuvent être, à la limite, regardés comme semblables, ce qui donne

$$\frac{m'm}{n'n} : \frac{m'i}{n'i} = 1.$$

Or, par construction, lorsque jn est devenu une tangente à l'ellipse, il se trouve perpendiculaire à ni; donc aussi jm doit être alors perpendiculaire sur mi, c'est-à-dire parallèle à jn, sans quoi l'on ne pourrait avoir à la limite, ainsi qu'il vient d'être démontré, $jm=jn$.

Chaque normale à l'ellipse est donc aussi normale à la courbe parallèle, et réciproquement; car à chaque normale de la première courbe correspond un point de la seconde, et en menant de ce point les normales à l'ellipse que comporte sa position, on doit en trouver une égale à la longueur constante qui sert à construire la courbe. Or, on vient de démontrer que cette normale de l'ellipse est aussi une normale de la courbe parallèle, donc, etc., C. Q. F. D.

Remarque. J'ai admis tacitement que le point i à la limite ne coïncide pas avec le point n, c'est-à-dire que le rayon de courbure de la courbe primitive n'est pas nul; moyennant cette restriction, qui convient à l'ellipse, la démonstration précédente est applicable à une courbe quelconque, même non algébrique (*).

2. — La courbe parallèle à l'ellipse peut être regardée, en raison de la propriété qui forme l'objet de ce théorème, comme l'enveloppe d'une circonférence de rayon constant dont le centre est assujetti à demeurer sur l'ellipse; or, à cette dernière, comme on sait, répond toujours dans l'espace une circonférence dont elle est la projection. Le cercle mobile *enveloppé* peut être considéré comme la projection d'une sphère de même rayon, dont le centre se meut sur la circonférence dont l'ellipse est la projection. L'enveloppe de cette sphère n'est autre chose que le tore ou surface annulaire, d'où il suit que la courbe parallèle à l'ellipse forme le *contour apparent* de la projection d'un tore. Sans avoir la prétention de créer un nom nouveau, je nommerai, seulement pour abréger, la courbe dont il s'agit *toroïde*, dési-

(*) C'est un cas particulier de la construction générale indiquée, t. II, p. 289.

gnation tirée, comme on voit, de l'une de ses propriétés les plus saillantes.

3. — De ce que la normale de la toroïde est nécessairement normale à l'ellipse, il résulte que les centres des cercles osculateurs aux points correspondants situés sur cette ligne coïncident, ou, en d'autres termes, que les rayons de courbure des deux courbes présentent une différence constante; il est évident qu'elles ont la même développée. Nous pouvons, en conséquence, regarder la toroïde comme décrite par le point d'une ligne droite qui se meut de manière à toucher la développée sans glisser dans le sens de sa longueur. On remarquera que, d'après ce qui a été dit plus haut, la toroïde se compose de deux branches décrites simultanément par les deux points de la droite mobile, également distants du point de l'ellipse, l'un du côté convexe, l'autre du côté concave. La première de ces branches est toujours de forme ovale, la seconde présente une figure variable suivant les cas : elle est ovale lorsque la distance à l'ellipse est inférieure au plus petit de ses rayons de courbure; vient-elle à le surpasser, la branche de toroïde offre quatre points de rebroussement situés sur la développée; mais si l'on fait croître la même distance au delà de la longueur du rayon de courbure maximum de l'ellipse, la branche redevient ovale. Il est très-facile de se rendre compte de toutes ces particularités.

4. — La connaissance du rayon de courbure d'une courbe étant l'un des meilleurs moyens d'en connaître les diverses affections, je rassemble ici quelques formules dont on pourra se servir utilement pour calculer la longueur de ce rayon, et, au besoin, pour le construire graphiquement.

Le rayon de courbure de la toroïde n'étant autre chose que celui de l'ellipse augmenté ou diminué d'une certaine longueur, les formules suivantes sont relatives à l'ellipse. Je suppose cette ligne rapportée à ses axes principaux a, b, c, x, y désignant les mêmes lignes que dans les traités classiques, nommons de plus N la portion de normale comprise entre la courbe et le grand axe, i l'angle qu'elle fait avec les rayons vecteurs ν, ν' menés aux deux foyers, et ρ le rayon de courbure.

On a

$$\tang i = \frac{cy}{b^2}, \quad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$$

et

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Cette dernière expression se déduit aisément de celle qui a été donnée par M. Gérono, tome II, p. 78.

Cela posé, on arrive sans peine aux formules suivantes.

1° Expression du rayon de courbure en fonction de la normale

$$\rho = \frac{N^3a^2}{b^4};$$

2° Expression du même rayon en fonction de l'angle i. ρ peut être mis sous la forme

$$\rho = \frac{(b^4 + c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4},$$

et comme l'on a

$$\cos i = \frac{b^2}{(b^4 + c^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

il vient

$$\rho = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{\cos^3 i}.$$

Cette formule a été indiquée par M. Transon (*Journal de Liouville*, t. I, p. 191); elle se prête à une construction graphique élégante et facile à retrouver.

Comme moyen de vérification, il est utile de remarquer que l'on a la relation

$$N\cos i = \frac{b^2}{a} \quad (*).$$

3° Expression du rayon de courbure en fonction des rayons vecteurs aux foyers. On a

$$4c^2 = \nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos 2i,$$

d'où $$\cos^2 i = \frac{\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu' - 4c^2}{4\nu\nu'} = \frac{b^2}{\nu\nu'},$$

et enfin $$\rho = \frac{(\nu\nu')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

5. — Considérons à présent la courbure des sommets de la toroïde. Ce que je vais dire se rapportera uniquement à la branche extérieure de la courbe, la seule dont il y ait lieu de s'occuper en vue du tracé des figures ovales. Soit λ la distance à l'ellipse, je pose

$$A = a + \lambda, \quad B = b + \lambda, \quad R = \frac{a^2}{b} + \lambda, \quad r = \frac{b^2}{x} + \lambda,$$

A, B, R, r étant les axes et les rayons de courbure principaux de la toroïde; l'élimination des quantités a, b donne

$$\lambda = \frac{RB - A^2}{R + B - 2A},$$

et, par suite,

$$a = \frac{(A-B)(R-A)}{R+B-2A},$$

$$b = \frac{(A-B)^2}{R+B-2A},$$

$$r = B - \frac{(A-B)^2}{R-A}.$$

Ces diverses formules contenant trois quantités, A, B, R, on voit que les axes principaux de la toroïde étant déter-

(*) V. t. II, p. 537. Théor. XIX. Tm.

minés, il est possible de disposer encore de R, ce qui n'a point lieu pour l'ellipse.

La dernière fait voir que r augmente avec R et converge vers la limite B. Lorsque R devient infini, on a

$$\lambda = B,\ a = A - B,\ b = 0,\ r = B.$$

L'ellipse se réduit, dans ce cas, à une ligne droite de longueur $2a$, et la toroïde à deux demi-circonférences raccordées entre elles par des lignes droites; en d'autres termes, la figure représente, ainsi que l'on pouvait s'y attendre, la projection d'un tore sur un plan parallèle à son axe.

6.— La longueur de l'arc de toroïde n'est pas exprimable sous forme finie, non plus que celle de l'arc d'ellipse; le premier est égal au second, augmenté de l'arc circulaire compris, sur la circonférence de rayon λ, entre deux rayons parallèles aux normales extrêmes, de sorte que S et S_0 étant les longueurs totales de la toroïde et de l'ellipse, on a

$$S = S_0 + 2\pi\lambda.$$

La surface en dehors de celle de l'ellipse, s'obtient par l'application de la règle de Guldin, elle est égale à l'arc parcouru par le milieu de λ multiplié par cette longueur. Or l'arc parcouru est lui-même égal à la demi-somme de l'arc de toroïde, et de l'arc d'ellipse, nommons Ω l'aire totale de la courbe, nous aurons

$$\Omega = \pi . ab + \left(\frac{S + S_0}{2}\right)\lambda = \pi . ab + S_0\lambda + \pi\lambda^2.$$

Cette surface est plus grande que celle de l'ellipse, qui aurait les mêmes axes que la toroïde, pour savoir quelle est la différence, il suffit de retrancher de Ω l'aire $\pi(a+\lambda)(b+\lambda)$, on trouve qu'elle est exprimée par la formule

$$\lambda\,[S_0 - \pi(a + b)],$$

or on a démontré, tome III, p. 232, que S_o est plus grand que $\pi(a+b)$, donc, etc. C.Q.F.D.

L'évaluation numérique de ces différences ne pouvant être obtenue que difficilement par les méthodes ordinaires, j'inscris ici quelques nombres propres à donner une idée de leur marche. Les longueurs d'ellipses sont extraites de la table (*) publiée dans le 3ᵉ volume du Cours de constructions de Sganzin, 4ᵉ édition. La longueur $2a$ est prise pour unité, et b varie de vingtième en vingtième :

$\frac{b}{2a}$	S_o	$\pi(a+b)$	$S_o-\pi(a+b)$	$\frac{S_o-\pi(a+b)}{S_o}$,
0,10	2,08324	1,88496	0,19828	0,09518
0,15	2,18660	2,04204	0,14456	0,06611
0,20	2,30028	2,19911	0,10117	0,04422
0,25	2,42272	2,35619	0,06653	0,02746
0,30	2,55338	2,51337	0,04011	0,01571
0,35	2,69078	2,67035	0,02043	0,00761
0,40	2,83596	2,82743	0,00853	0,00301
0,45	2,98622	2,98451	0,00171	0,00057
0,50	3,14159	3,14159	0,00000	0,00000

Les deux dernières colonnes expriment les différences rapportées au diamètre principal et au périmètre de l'ellipse. Les unes et les autres vont en décroissant à mesure que l'ellipse approche davantage de la figure circulaire, et deviennent nulles à cette limite.

7. — *Tracé en grand de la toroïde.* La facilité de tracer une courbe a bien plus d'importance pour les arts que pour la théorie. Il entre donc naturellement dans mes vues, de re-

(*) Cette table ne mérite, sous le rapport de l'exactitude, qu'une médiocre confiance. Les rapports qu'elle donne, rapproches de ceux obtenus par M. de Saint-Guilhem, en diffèrent quelquefois dans les trois dernières décimales.

chercher pour la toroïde des moyens de description commodes et peu compliqués.

1° La construction peut s'effectuer par points, au moyen des normales de l'ellipse sur lesquelles on porte la longueur constante λ. Ce procédé a contre lui sa longueur.

2° Dans certains cas on se servira avec avantage d'un procédé indiqué par M. de Prony, lequel consiste à regarder la courbe comme l'enveloppe de ses tangentes. Il détermine les points où celles-ci rencontrent les côtés du rectangle construit sur les demi-axes a, b. Soit α la longueur interceptée par la tangente à l'ellipse sur le côté du rectangle parallèle aux x, à partir du sommet opposé à l'origine ; β la portion de l'autre côté interceptée entre la même tangente et le grand axe ; on divisera ce dernier côté, parallèle aux y, en n parties égales ; pour une valeur de β comprenant p divisions, on aura (je supprime la démonstration),

$$\beta = p\frac{b}{n}, \qquad \alpha = \frac{2a}{1+\frac{n}{p}},$$

$$a - x = \frac{2a}{1+\frac{n^2}{p^2}}, \qquad y = \frac{2b\frac{n}{p}}{1+\frac{n^2}{p^2}}.$$

On doit remarquer l'identité

$$(2a-\alpha)(b+\beta) = 2ab.$$

A chaque tangente ainsi obtenue on mènera une parallèle qui en soit distante de la longueur λ ; ce sera la tangente de la toroïde. Le point de contact sera la projection du point (x, y) sur cette tangente.

L'espace nécessaire pour ce mode de description n'excédent pas les limites du rectangle circonscrit à chaque quart de courbe, ce seul motif pourrait le faire préférer par les constructeurs, lorsque l'ovale devra présenter de grandes dimensions.

On pourrait construire des tables pour l'application de cette méthode. En les dressant pour le tracé d'une circonférence de cercle dont le rayon serait égal à l'unité, les longueurs α, $a - x$, parallèles à l'axe a, s'obtiendraient en multipliant par a les nombres donnés par les tables ; de même, on calculerait les longueurs parallèles à l'axe b en multipliant les nombres correspondants par b.

3° La toroïde est susceptible d'être tracée d'une manière assez nette par les intersections successives d'une suite de circonférences de rayon λ ayant leurs centres sur l'ellipse.

4° Tracé de la toroïde d'un mouvement continu. Il serait peut-être possible d'établir un instrument qui tracerait la toroïde par un trait continu.

Soit OCO' (le lecteur est prié de faire la figure) un triangle isocèle variable, dont le côté OC ayant pour longueur $\frac{1}{2}(a+b)$ passe constamment par le centre O de la courbe, et dont la base OO' coïncide en direction avec le grand axe ; on sait que le point n, pris sur le côté CO', de manière que Cn ait pour longueur $\frac{1}{2}(a-b)$, décrit l'ellipse, et que si l'on prend, sur le prolongement de OC, CI = OC, la droite In est normale à l'ellipse menée par le point n. Il suit de là que tout point m de cette droite décrit une branche de toroïde.

L'instrument se composerait de trois règles ou tiges. La première, CI, tournant autour du centre O ; la seconde articulée sur la première en C et ayant son extrémité O' constamment sur le grand axe ; la dernière enfin articulée en n sur CO' et assujettie à passer toujours par le point I sur le prolongement de OC, au moyen d'un anneau ou d'une *prison* qui lui permettrait de glisser dans le sens de sa longueur.

Un crayon, ou même un tire-ligne attaché en m tracerait la toroïde; il arriverait même *que les lames du tire-ligne, une fois fixées dans le sens du trait, seront toujours dirigées convenablement par ce système.*

8. Les notions qui précèdent établissent que la branche extérieure des toroïdes, ou courbes parallèles à l'ellipse, jouit, comme type de formes *ovales*, de toutes les propriétés reconnues à cette dernière, et qu'elle permet de plus de choisir l'une des deux courbures principales ou leur rapport. De là résulte la variation possible de la forme ovale entre les limites les plus étendues qu'il soit nécessaire de considérer dans les arts, c'est-à-dire depuis une portion de ligne droite jusqu'au système de deux demi-circonférences raccordées par des portions de lignes droites.

Nous avons vu que les propriétés essentielles descriptives et métriques de cette courbe sont intimement liées à celles de l'ellipse, et que sa construction, même en grand, n'offre pas de difficultés. Ce sera peut-être pour les praticiens une raison d'en faire des applications; mais je suis surtout convaincu que son étude, approfondie davantage, doit conduire tôt ou tard à d'intéressantes découvertes qui en feront un objet d'attention et comme un complément naturel de la théorie de l'ellipse.

Note. M. Cauchy a donné la théorie analytique des toroïdes (*Comptes Rendus*, 2e série, 1841, t. XIII, p. 1062). Soit $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$ (1) l'équation de l'ellipse,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2 \qquad (2)$$

l'équation du cercle générateur; prenant la fonction prime de β dans les deux équations et les égalant, on obtient

$$a^2\frac{x-\alpha}{\alpha}=b^2\frac{y-\beta}{\beta}=\theta,$$

d'où
$$\alpha=\frac{a^2x}{\theta+a^2},\quad \beta=\frac{b^2y}{\theta+b^2};$$

substituant dans les équations (1) et (2), il vient

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1,\quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2.$$

En éliminant θ, on obtiendrait l'équation des toroïdes. Passant aux coordonnées polaires, en faisant $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, il vient $r^2=\left[\frac{a^2}{(\theta+a^2)^2}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{(\theta+b^2)^2}\sin^2\varphi\right]^{-1}$,

$$(\theta^2-a^2k^2)(\theta+b^2)^2\cos^2\varphi+(\theta^2-b^2k^2)(\theta+a^2)^2\sin^2\varphi=0.$$

Le tore est une surface du quatrième degré, les sections planes sont donc des lignes du même ordre; le plan touchant le tore intérieurement et mené parallèlement à l'axe donne pour section une cassinoïde. Mais on n'obtient pas cette courbe par d'autres plans coupants parallèles à l'axe, ce qui est d'ailleurs évident, en faisant passer le plan par l'axe : on obtient deux cercles dont le système ne peut jamais représenter une cassinoïde. Nous donnerons incessamment une théorie de cette courbe et de la lemniscate, à laquelle, dans certains cas, elle devient identique.

Dans la dissertation de M. Reiss, citée ci-dessus, on trouve toutes les formules différentielles relatives aux lignes équidistantes, planes et à double courbure, et aussi pour les surfaces équidistantes. Tm.