CH. CHOQUET

Problème proposé à l'examen de 1844, pour l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 439-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__439_1>

PROBLÈME PROPOSÉ A L'EXAMEN DE 1844

POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. CH. CHOQUET.

Une corde, dans une conique, étant vue d'un foyer sous un angle constant, trouver le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes menées par les extrémités de la corde.

On mène par le foyer d'une section conique, deux rayons vecteurs qui forment entre eux un angle donné 2α; trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées à la courbe par les extrémités de ces deux rayons vecteurs.

Ce problème se résout très-simplement, en employant des coordonnées polaires.

(*) V. t. II, pag. 256.

L'équation de la courbe donnée est $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$.

L'équation de la droite qui joint les deux points (ρ', ω'), (ρ'', ω'') est

$$\rho = \frac{\rho'\rho''\sin(\omega' - \omega'')}{\rho''\sin(\omega - \omega'') - \rho'\sin(\omega - \omega')};$$

en exprimant que les deux points sont sur la courbe, on change cette équation dans la suivante

$$\rho = \frac{p}{\dfrac{\cos[\omega - \frac{1}{2}(\omega' + \omega'')]}{\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} - e\cos\omega},$$

et en supposant que les deux points se confondent, on a pour l'équation de la tangente au point $[\rho', \omega']$

$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \omega') - e\cos\omega} \quad (^*).$$

L'équation de la seconde tangente est

$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \omega' - 2\alpha) - e\cos\omega}.$$

Pour le point de rencontre de ces deux tangentes, on doit avoir

$$\cos(\omega - \omega') = \cos(\omega - \omega' - 2\alpha),$$

d'où $\quad \omega - \omega' + \omega - \omega' - 2\alpha = 2k\pi, \ \omega = \omega' + k\pi + \alpha,$

et en éliminant ω' entre la dernière équation et celle de la première tangente, on obtient l'équation du lieu cherché, qui est

$$\rho = \frac{p}{\pm\cos\alpha - e\cos\omega}, \text{ ou simplement } \rho = \frac{\dfrac{p}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{e}{\cos\alpha}\cos\omega};$$

(*) Voir t. II, p. 512.

Quand la courbe donnée est une ellipse, le lieu demandé peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole ayant le foyer et la directrice correspondante en commun avec l'ellipse.

Quand la courbe donnée est une parabole ou une hyperbole, le lieu demandé est une hyperbole.

Quand $2\alpha = 180°$, le lieu est la directrice; c'est, en effet, ce qu'on devait trouver, puisque la directrice est la polaire du foyer.

L'équation $\omega = \omega' + \alpha + k\pi$ démontre ce théorème. La droite qui joint le foyer au point de concours de deux tangentes divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de contact (*).

En remplaçant l'angle 2α par son supplément, ce qui revient à remplacer α par $90° - \alpha$, on obtient un lieu différent du précédent et dont l'équation est

$$\rho = \frac{\frac{p}{\sin\alpha}}{1 - \frac{e}{\sin\alpha}\cos\omega}.$$

Lorsqu'on emploie, pour résoudre le problème, les coordonnées rectangles, on obtient à la fois les deux lieux représentés par les deux équations ci-dessus, en sorte que l'équation à laquelle on parvient est du quatrième degré et décomposable en deux facteurs du second degré.

On peut obtenir aisément, par des considérations toutes semblables à celles qui viennent d'être exposées, l'équation de la courbe tangente aux cordes qui joignent les extrémités des deux rayons vecteurs.

L'équation d'une de ces cordes est

$$\rho = \frac{p}{\frac{\cos(\omega - \omega' - \alpha)}{\cos\alpha} - e\cos\omega};$$

(*) Voir t. II, p. 553. La bissectrice coupe la corde au point où elle touche son enveloppe. Tm.

changeant ω' en $\omega'+h$, afin d'obtenir l'équation d'une seconde corde, il vient

$$\rho=\frac{p}{\frac{\cos(\omega-\omega'-h-\alpha)}{\cos\alpha}-e\cos\omega}.$$

Pour le point d'intersection des deux cordes, on doit avoir

$$\omega-\omega'-\alpha+\omega-\omega'-h-\alpha=2k\pi,$$

d'où $$\omega=\omega'+\alpha+\frac{h}{2}+k\pi,$$

et quand les deux cordes se confondent, $\omega=\omega'+\alpha+k\pi$.

En éliminant ω' entre cette dernière équation et celle de la première corde, on obtient l'équation de la courbe demandée, qui est

$$\rho=\frac{p\cos\alpha}{1-e\cos\alpha\cos\omega}.$$

Cette courbe a encore le foyer et la directrice en commun avec l'ellipse.

Note. M. Poncelet démontre ces divers théorèmes géométriquement. (Prop. proj., p. 279). Tm.