NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Remarque sur les lignes incommensurables

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 436-438
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__436_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REMARQUE SUR LES LIGNES INCOMMENSURABLES.

PAR M. LEBESGUE,

Je crois qu'il est bon de démontrer en géométrie l'existence des lignes incommensurables, avant d'entamer la partie qui traite des rapports et des proportions, et d'avoir exposé la mesure des surfaces. Voici une démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, qui me semble convenir aux éléments.

Sur la diagonale AC (*fig.* 63) du carré, portez son côté $BC = AD$, tirez BD, puis DE perpendiculaire à BD; de même EF perpendiculaire à DE, de même encore FG perpendiculaire à EF, et ainsi de suite, vous aurez

$$\begin{array}{ll} AC = 1.BC + DC, & DC < BC, \\ BC = 2.DC + EC, & EC < DC, \\ DC = 2.EC + FC, & FC < EC, \\ \text{etc.}; & \end{array}$$

et ainsi de suite à l'infini. Pour la démonstration, il suffit de joindre D avec le milieu O de BE.

On voit donc que les équations se prolongent à l'infini et que par conséquent il n'y a point de commune mesure.

Mon ami M. Lionnet m'ayant demandé quelques conseils relativement à sa géométrie, dont les Annales rendent avec justice un compte avantageux, je l'ai lue avec attention. Il m'a semblé que la recherche de la plus grande commune mesure pouvait être le problème 3 du livre 3, et qu'il convenait de démontrer immédiatement sur l'exemple précédent que l'incommensurabilité existe entre certaines lignes.

Si l'auteur tient absolument à ne point séparer deux problèmes par un théorème, il peut poser ainsi la question : Trouver la commune mesure de la diagonale et du côté du carré ; cet exemple vient naturellement après l'exposé de la méthode de la commune mesure.

Note. C'est dans le dixième livre qu'Euclide commence à s'occuper des grandeurs incommensurables. La première définition de ce livre est que deux *grandeurs* sont *commensurables*, lorsqu'elles ont une commune mesure. Il démontre ensuite (Prop. V), que les grandeurs commensurables sont entre elles comme nombre à nombre, et par ce mot *nombre,* il faut toujours entendre, selon la deuxième définition du septième livre, un assemblage d'unités ; la proposition suivante (VI) démontre que les grandeurs qui sont entre elles comme nombre à nombre sont commensurables ; et par conséquent (VIII) les grandeurs qui ne sont pas comme nombre à nombre sont *incommensurables* ; une droite étant de longueur donnée, on peut trouver une infinité d'autres droites, les unes commensurables avec la droite donnée et les autres incommensurables, la droite donnée se nomme *rationnelle*, et de même les droites commensurables avec elle ; mais les droites incommensurables se nomment *irrationnelles* (définition 6). On voit donc que selon Euclide, l'incommensurabilité qualifie le rapport et *l'irrationalité* s'applique aux quantités mises en rapport. Mais jamais il ne parle de *nombre irrationnel*, cela impliquerait chez lui une locution contradictoire, et reviendrait à dire un nombre qui n'est pas un nombre. La proposition finale (CXVII) du dixième livre établit, que la diagonale du carré est incommensurable en longueur au côté du carré. Euclide en donne deux démonstrations ; voici la première d'une extrême simplicité.

Soit AC la diagonale et AB le côté du carré, si l'on avait

$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$; m et n étant deux nombres premiers entre eux, l'on aurait aussi $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{m^2}{n^2} = 2$, donc m^2 est un nombre pair, par conséquent m est pair et n premier avec m est impair, faisons $m = 2p$, on aura $\frac{2p^2}{n^2} = 1$, donc n^2 est pair, et aussi n, ce nombre serait donc à la fois impair et pair; ce qui est absurde, donc etc. Le mot irrationnel répond à ἄλὸγοσ des Grecs ; mais ce mot devrait plutôt se traduire par inexprimable, *ineffable* ; les Grecs désignaient ainsi des nombres qu'on ne peut prononcer ; le λογὸς signifiant en même temps *parole* et *rapport*, les traducteurs latins ont adopté cette dernière acception ; quelquefois les grecs se servaient encore du mot κωφὸς, muet, pour désigner un nombre qu'on ne peut prononcer, de même que nous disons un *e* muet ; mais comme le même mot grec le plus souvent veut dire *sourd*, les traducteurs ont encore adopté cette signification ; de là le nom de *nombres sourds*, donné aux irrationnels.