TARNIER

Note sur l'équation aux carrés des différences

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 410-412

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__410_1>

NOTE

sur l'équation aux carrés des différences.

PAR M. TARNIER,
professeur.

1° Trouver la relation entre les coefficients d'une équation, pour qu'elle soit l'équation aux carrés des différences d'une équation du 3me degré de la forme $x^3+qx+r=0$.

D'après la relation $n=\frac{m(m-1)}{1.2}$, on voit que $n=3$; l'équation cherchée étant du 3me degré, est de la forme

$$\zeta^3+F\zeta^2+G\zeta+H=0.$$

Or le calcul donne pour équation aux carrés des différences de $x^3+qx+r^2=0$,

$$\zeta^3+6q\zeta^2+9q^2\zeta+(4q^3+27r^2)=0,$$

et l'on voit en identifiant que

$$\frac{F}{2}=3q, \qquad G=9q^2=\frac{F^2}{4}.$$

Cette condition $G=\frac{F^2}{4}$ est nécessaire et suffisante. En effet, pour retrouver l'équation primitive, on prendra $q=\frac{F}{6}$, et on pourra choisir r, de façon qu'on ait $4q^3+27r^2=H$; r pourra être imaginaire.

Cette condition ne peut pas s'énoncer ainsi : « la somme des trois premiers coefficients est un carré » ; mais bien · « les trois premiers termes doivent être les trois termes du carré d'un binôme, en supposant le coefficient du premier terme égal à 1 » ; et encore mieux : « le carré de la moitié du coefficient du deuxième terme est égal au produit des coefficients du premier et du troisième terme. »

2° Nous allons exposer une deuxième méthode qui, ne nécessitant pas l'équation aux carrés des différences, s'applique à toute équation du troisième degré, et indique la méthode à suivre pour un degré supérieur au troisième.

Soient $\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$ les racines de l'équation ; celles de

$$\zeta^3+F\zeta^2+G\zeta+H=0,$$

sont $\begin{matrix}(a-b)^2\\(b-c)^2\\(a-c)^2\end{matrix}$; et l'on voit que les trois quantités $\begin{matrix}a-b\\b-c\\a-c\end{matrix}$ sont telles, que la somme des deux premières donne la troisième ; donc, les trois racines sont $\begin{matrix}p^2\\q^2\\(p+q)^2\end{matrix}$ et l'on a

$$(1) \qquad -F = p^2 + q^2 + (p+q)^2$$
$$(2) \qquad G = p^2q^2 + (p^2+q^2)(p+q)^2,$$
$$(3) \qquad -H = p^2q^2(p+q)^2;$$

il suffit d'éliminer $\frac{p}{q}$, pour avoir la relation entre $\begin{matrix}F\\G.\\H\end{matrix}$ Or, on a :

$$-F = 2(p^2+q^2+pq), \quad G = (p^2+q^2)^2 + 2pq(p^2+q^2) +$$
$$+ p^2q^2 = (p^2+q^2+pq)^2 = \frac{F^2}{4}.$$

Cette condition $G = \frac{F^2}{4}$ est suffisante, car en prenant $\frac{p}{q}$, de manière à satisfaire à $\frac{(1)}{(3)}$, G sera toujours égal à $\frac{F^2}{4}$.