ÉMILE COUPY

Solution de la question 85

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 404-410
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__404_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 85 (p. 256).

PAR M. ÉMILE COUPY,
bachelier ès sciences mathématiques.

—

Problème. — Quel est le nombre des permutations de n lettres a, b, c, d... où une lettre au moins est à sa place?

Solution. Nous rappellerons d'abord que dans le triangle arithmétique de Pascal, la somme des p premiers nombres figurés de l'ordre n, qui forment la $(n+1)^{ème}$ ligne du triangle, est égale au $p^{ème}$ nombre figuré de la ligne suivante, c'est-à-dire de l'ordre $n+1$, ce qui donne pour cette somme l'expression

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

(Voir pour la démonstration, algèbre de Mayer et Choquet, 2e édition, p. 342 et suivante). Cela posé, revenons au problème. Représentons par $P_{(n)}$ le nombre des permutations de n lettres. D'abord le nombre de permutations où l'une des lettres, la première, je suppose, est à son rang, égale videmment le nombre de permutations que l'on peut faire avec les $n-1$ autres, c'est-à-dire $= P_{(n-1)}$; le nombre de permutations où la seconde, b, est à son rang égale aussi P_{n-1}, diminué du nombre de permutations où b était à son rang dans le nombre P_{n-1} obtenu en premier lieu. Or ce nombre est évidemment P_{n-2}, c'est-à-dire le nombre de permutations que l'on peut faire avec les $n-2$ autres lettres obtenues en négligeant a et b. On a donc en définitive $P_{(n-1)} - P_{(n-2)}$. Maintenant le nombre de permutations où c est à son rang $= P_{n-1}$, diminué du nombre de permutations où déjà cette lettre était à son rang dans les deux nombres déjà obtenus pour b et a. Or ce nombre est facile à obtenir, car il suffit de diminuer les indices de 1 dans les nombres précédents, c'est-à-dire que ce nombre est $[P_{(n-2)}] + [P_{(n-2)} - P_{(n-3)}]$. En effet, les permutations où a et c sont à leurs rangs respectifs $= P_{n-2}$, et les permutations où b et c sont à leurs rangs respectifs $= P_{(n-2)}$, diminué du nombre de permutations où ils étaient déjà à leurs rangs dans le nombre précédent $P_{(n-2)}$ obtenu pour a et c, c'est-à-dire, en d'autres termes, diminué du nombre de permutations où les trois lettres a,b,c sont à leurs rangs, nombre évidemment $= P_{(n-3)}$. Ainsi les permutations où b et c sont à leurs rangs $= P_{(n-2)} - P_{(n-3)}$, donc enfin

$$P_{(n-1)} - [P_{(n-2)} + P_{(n-2)} - P_{(n-3)}] = P_{(n-1)} - 2P_{(n-2)} + P_{(n-3)},$$

est ce nombre de permutations où c est à son rang. Et en général pour avoir le nombre de permutations où une lettre est à son rang, quand on a celui où chacune des lettres précédentes est à son rang, il suffit de retrancher de $P_{(n-1)}$, la somme des nombres de permutations obtenues pour toutes les lettres précédentes, mais prises avec une lettre de moins, c'est-à-dire en ayant soin de diminuer de 1 chaque indice; et en effet le nombre de permutations où une lettre quelconque k est à son rang $= P_{(n-1)}$ diminué de la somme des nombres de permutations où déjà elle était à son rang sous toutes les permutations obtenues pour les lettres précédentes. Or supprimez cette lettre k dans toutes les permutations précédentes où elle est à son rang, il nous restera pour le nombre de permutations où elle est à son rang, le nombre de permutations déjà écrites, mais faites avec une lettre de moins, c'est-à-dire, que les indices seront diminués de 1. On a donc ainsi les nombres suivants :

Nombre de permutations où est à son rang :	nº des lettres.
$a = P_{n-1} \ldots\ldots$	1
$b = P_{n-1} - P_{n-2} \ldots\ldots$	2
$c = P_{n-1} - 2P_{n-2} + P_{n-3} \ldots\ldots$	3
$d = P_{n-1} - 3P_{n-2} + 3P_{n-3} - P_{n-4} \ldots\ldots$	4
$e = P_{n-1} - 4P_{n-2} + 6P_{n-3} - 4P_{n-4} + P_{n-5} \ldots$	5
$f = P_{n-1} - 5P_{n-2} + 10P_{n-3} - 10P_{n-4} + 5P_{n-5} - P_{n-6} \ldots$	6
. . . .	
$k = P_{n-1} - (n-2)P_{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}P_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}P_{n-4} + \ldots \pm P_1 \ldots$	$n-1$
$l = P_{n-1} - (n-1)P_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}P_{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}P_{n-4} + \ldots \mp P_0 \ldots$	$n.$

La somme S de tous ces nombres de permutations, sera le nombre cherché. On a le double signe $\pm$. $+$ est pour n impair, et $-$ pour n pair. On voit que les coefficients de P_{n-1}, $P_{n-2} \ldots$ dans la ligne générale, celle pour la $n^{ème}$ lettre, sont ceux du binôme : l'exposant étant $(n-1)$.

Enfin on se rappellera que $P_0 = 1$ (*voir* les cours d'algèbre).

Calculons maintenant la somme S. Or on remarque que dans cette somme les coefficients de P_{n-2}, $P_{n-3} \ldots$ ne sont autre chose que la somme des nombres figurés des divers ordres, formant le triangle de Pascal, somme dont nous avons donné l'expression au commencement de cet article.

Remarquons d'abord que $n = 1+1+1+1\ldots =$ la somme de n unités, c'est donc la somme de la première ligne horizontale du triangle de Pascal, continuée jusqu'à ce qu'elle renferme n termes, et c'est le coefficient de P_{n-1} dans la somme S. Les coefficients suivants sont successivement la somme de la 2me, 3me, 4m ,... $n^{ème}$ ligne horizontale du triangle de Pascal, par conséquent le nombre des termes de chaque coefficient va toujours en diminuant de 1, et enfin la $n^{ème}$ ligne du triangle étant 1, le dernier terme P_1 de S a en effet le coefficient 1; on a donc dans cette somme S :

Coef. de	ou somme de la ligne horiz du triangle de Pascal		nombre des termes.
P_{n-1}	1re	$= n\ldots$	n
P_{n-2}	2me	$= \dfrac{(n-1)n}{1.2}\ldots$	$n-1$
P_{n-3}	3me	$= \dfrac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$	$n-2$
P_{n-4}	4me	$= \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}\ldots$	$n-3$
P_{n-5}	5e	$= \dfrac{(n-4)\ldots(n-1)n}{1.2.3.4.5}\ldots$	$n-4$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .
P_3	$(n-1)^{ème}$	$= \dfrac{4.5.6\ldots n}{1.2.3\ldots(n-3)}\ldots$	4
P_2	$(n-2)^{ème}$	$= \dfrac{3.4.5\ldots n}{1.2\ldots(n-2)}$	3
P_1	$(n-1)^{ème}$	$= \dfrac{2.3.4\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}$	2
P_0	$n^{ème}$	$= \dfrac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n} = 1\ldots$	1.

Donc la formule cherchée est

$$S = nP_{n-1} - \frac{(n-1)\,n}{1.2} P_{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)\,n}{1.2.3} P_{n-3} -$$
$$- \frac{(n-3)\ldots n}{1.2.3.4} P_{(n-4)} \ldots\ldots \mp P_0;$$

formule qu'on peut écrire sous une forme différente en remarquant que

$$nP_{n-1} = P_n,\; n(n-1)P_{n-2} = P_n,\; n(n-1)(n-2)P_{n-3} = P_n, \text{etc.}$$

Alors en écrivant $P_0 = 1$ sous la forme $\frac{P_n}{P_n}$, on peut mettre P_n en facteur commun, et écrire

$$S = P_n \left(1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} \ldots\ldots \pm \frac{1}{P_n}\right).$$

Or $P_n = 1.2.3.4\ldots n$, donc

$$S = (1.2.3\ldots n) - (3.4\ldots n) + (4.5\ldots n) - (5.6\ldots n)\ldots \mp n \pm 1,$$

et il est bon de remarquer que dans les applications numériques de cette formule, pour former le premier terme, $1.2.3\ldots n$, on devra le commencer à rebours, c'est-à-dire de la sorte : $n.(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$, parce que les produits partiels n, $(n-1)\,n$, $(n-2)(n-1)n\ldots$ sont précisément les autres termes de la formule.

II. Au moyen de la formule précédente on pourra trouver le nombre de permutations où aucune lettre n'est à sa place. Car ce nombre est évidemment $P_n - S = S'$, et

$$S' = (3.4\ldots n) - (4.5\ldots n) + (5.6\ldots n)\ldots \pm n \mp 1.$$

III. Comme application numérique, nous résoudrons le problème suivant de probabilité, résolu pour la première fois par Montmort (*), et proposé dans la Correspondance mathématique de Quételet, t. III, p. 315. On a 13 cartes dont aucune n'est répétée, on les bat, puis on les tire succes-

(*) Essai d'analyse sur les jeux de hasard, p. 54; Montmort ne résout qu'un cas particulier de la question ; son ouvrage a paru en 1708. Tm.

sivement en nommant suivant l'ordre des cartes : as. 2,3,4,.. jusqu'au roi qui est la dernière, et on parie qu'il arrivera au moins une fois qu'une carte sera à son rang, quel doit être le rapport des paris ?

Il faut faire $n = 13$, S est le nombre de cas favorables, S' le nombre de cas défavorables, or ici :

$$P_n = 1.2.3... 13 = 6227020800,$$

et on trouve pour

$$S = 7318002277 - 3381774409 = 3936227868.$$

C'est là le nombre de chances favorables · le nombre de chances défavorables est donc

$$6227020800 - 3936227868 = 2290792932.$$

Il faut donc parier 393.... contre 229.... ou (en divisant par 36), 109339663 contre 63633137, qu'il arrivera au moins une fois, qu'en tirant une carte, on la nommera ; les deux derniers nombres, sont premiers entre eux, mais étant fort grands on se fait difficilement idée du rapport des paris. Mais si le second nombre se terminait par un 8 au lieu d'un 7, il serait divisible par 6 ; le quotient sera 10605523, et divisant 109339663 par ce quotient, on trouve 10 et environ $\frac{1}{3}$. On peut donc dire qu'il faut parier un peu moins de 11 contre 6.

Enfin, pour terminer, disons que si on fait successivement dans S et S',

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,$$

on aura

$$S = 1,\ 1,\ 4,\ 15\ 76\ 455\ 3186\ 25487\ 229384\ 2293839\ 25232230\ 302786759\ 3936227868,$$

$$S' = 0,\ 1,\ 2,\ 9,\ 44\ 265\ 1854\ 14833\ 133496\ 1334961\ 14684570\ 176214841\ 2290792937.$$

On peut voir : Développement sur la partie élémentaire des mathématiques par Bertrand de Genève, t. I, p. 410, la solution du problème de Montmort, mais non par la formule générale que nous avons donnée ici. Voir aussi *Annales de Gergonne*, t. XII, p. 120.

Note. Le problème du jeu de rencontre a été résolu par Euler (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751); Laplace s'en est aussi occupé (Calcul des probabilités, p. 217), sa marche est analogue à celle que M. Coupy a suivie. Enfin M. Catalan a généralisé l'énoncé, on trouve la solution au journal de M. Liouville, tome II, p. 475. On voit que ce problème mène à une série, développement de e^{-1}; Daniel Bernoulli est le premier qui ait indiqué l'équation limite $\left(1-\frac{m}{\infty}\right)^{\infty}=e^{-m}$. (Mémoires de P., t. XIV, p. 6, 1769); M. Cauchy en a donné une démonstration rigoureuse, et en a fait la base du calcul différentiel, méthode aussi ingénieuse que peu naturelle (Moigno, t. I, p. 3). Tm.