FINCK

Réponse aux notes des pages 148, 149

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 401-404

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__401_0>

RÉPONSE AUX NOTES DES PAGES 148, 149.

PAR M. FINCK,
docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collège de Strasbourg,

—

1° L'équation du second degré à deux variables peut être représentée d'une infinité de manières par $pq + a^2 = 0$, qui renferme six *constantes*. p, q, a sont de la forme $Ay + Bx + C$, ou $y + kx + l$; dans ce dernier cas, a^2 serait multiplié par une constante. Admettons cela : notre équation devient

$$(y + kx + l)(y + k'x + l') + \lambda(y + k''x + l'')^2 = 0. \quad (1)$$

Je ne reprendrai pas les raisonnements de *M. Plücker*; il faudrait entrer dans des détails qu'on peut éviter. Je me rapprocherai des méthodes enseignées dans nos écoles. Soit donnée une courbe du second degré; j'y prends deux tangentes et la sécante de contact : soient $y + kx + l = 0$, $y' + kx' + l' = 0$ les tangentes; $y'' + kx'' + l = 0$ la sécante. L'équation représente une infinité de lignes du second degré, ayant les deux premières droites pour tangentes, la dernière pour sécante de contact. Il y a plus : l'équation (1) les représente toutes, car elle renferme sous ce rapport une arbitraire λ, et c'est tout ce qu'elle peut renfermer d'arbitraire. Donc (1) représente aussi notre courbe.

Voici une seconde démonstration moins simple soit

$$y^2 + mx^2 + 2kx = 0, \quad (2)$$

l'équation de la courbe rapportée au diamètre mené par le point de concours des tangentes, et à la tangente au sommet de ce diamètre. Les équations des tangentes seront de la forme

$$yy' + mxx' + h(x + x') = 0,$$
$$yy' - mxx' - h(x + x') = 0.$$

La sécante de contact $x - x' = 0$.

Je dis que l'équation (2) peut se transformer en

$$[yy'+mxx'+h(x+x')]\,[yy'-mxx'-h(x+x')]+\lambda(x-x')^2=0,$$

ou

$$y^2y'^2 - [mxx'+h(x+x')]^2 + \lambda(x-x')^2 = 0,$$

ou

$$y^2+x^2\frac{\lambda-(mx'+k)^2}{y'^2}+2x\frac{-kx'(mx'+k)-\lambda x'}{y'^2}+\frac{(\lambda-k^2)x'^2}{y'^2}=0$$

Annulons d'abord le dernier terme, en prenant $\lambda = k^2$. Le coefficient de x^2 devient

$$\frac{-m^2x'^2-2kmx'}{y'^2} = m, \quad \text{vu que} \quad y'^2 + mx'^2 + 2kx' = 0.$$

Celui de $2x$, se transforme en

$$k\,\frac{(-2kx'-mx'^2)}{y'^2} = k, \quad \text{par la même raison. Donc, etc}$$

Rien n'empêche de généraliser ce résultat par une transformation de coordonnées, ce qui d'ailleurs est inutile.

2° Prenez sur une ligne du second degré quatre points · par ces quatre points vous pourrez faire passer une infinité de ces lignes, dont l'équation aura une seule constante arbitraire. soient $p=0$, $q=0$, deux côtés opposés du quadrilatère déterminé par ces points ; $r=0$, $s=0$ les deux autres. L'équation

$$pq = \lambda rs$$

représente une ligne du second degré quelconque menée par ces quatre points. En effet, elle est satisfaite par les quatre points dont le premier est $(p=0, r=0)$, le second $(p=0, s=0)$, etc.. et elle renferme une arbitraire λ. Donc elle représente aussi notre courbe. Autrement prenez $r=0$ pour axe des x; $s=0$ pour axe des y ; soient x', x'' les abscisses des points situés sur le premier axe; y', y'' les ordonnées des deux autres, les équations de nos quatre droites seront

$$
\begin{array}{lll}
r=0 & \text{ou} & y=0 \\
s=0 & & x=0 \\
p=0 & & \dfrac{y}{y'}+\dfrac{x}{x'}-1=0 \\
q=0 & & \dfrac{y}{y''}+\dfrac{x}{x''}-1=0.
\end{array}
$$

Donc

$$pq-\lambda rs=\left(\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}-1\right)\left(\frac{y}{y''}+\frac{x}{x''}-1\right)-\lambda xy=0.$$

ou

$$\frac{y^2}{y'y''}+xy\left(\frac{1}{y'x''}+\frac{1}{x'y''}-\lambda\right)+\frac{x^2}{x'x''}+$$
$$+y\left(\frac{-1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)+x\left(\frac{-1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)+1=0.$$

Or, l'équation d'une conique, menée par ces quatre points, est

$$\frac{y^2}{y'y''}+mxy+\frac{x^2}{x'x''}+y\left(-\frac{1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)+$$
$$+x\left(-\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)+1=0.$$

En faut-il davantage pour convaincre ?

Note. Oui, il faut davantage. La méthode dont M. Plucker, à l'instar de MM. Bobillier, Lamé etc., fait usage, consiste à identifier une équation donnée avec une équation de même degré, mais d'une autre forme, à l'aide d'un certain nombre de constantes arbitraires; pourvu qu'on ait autant d'équations que de constantes arbitraires, cette identification est possible. *analytiquement parlant.* Mais la possibilité géométrique exige que l'on prouve que ces constantes ne deviennent jamais ni infinies, ni imaginaires; et ici il s'agit d'une application à une portion déterminée de l'espace, à la géométrie; c'est donc ce dernier genre de possibilité qu'il faut établir. Dès lors, on est entraîné dans une discussion assez épineuse qui fait disparaître l'avantage de la simplicité. On devra aussi dire pourquoi le même genre de raisonnement cesse d'être applicable quand il s'agit de lignes supérieures au second degré ; à quoi cela tient-il? d'ailleurs, la méthode est si rapide, si féconde, qu'il ne faut rien négliger pour la mettre à l'abri de toute objection.

Tm.