NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES RITT

Solution du problème 40

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 391-393
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__391_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 40 (T. I, p. 395).

PAR M GEORGES RITT.

—

L'énoncé de ce problème qui n'est applicable qu'aux courbes du deuxième ordre douées d'un centre peut être modifié et généralisé de la manière suivante.

Soit ABC un triangle inscrit dans une conique, soit menée une droite quelconque parallèlement à la tangente qui passe par A ; ce point, le milieu de la portion de la parallèle interceptée entre les côtés AB et AC, et le pôle P du côté BC sont sur une même droite.

La démonstration de ce théorème s'obtient facilement par l'analyse.

Si l'on prend pour axes coordonnés les côtés AB, AC, l'équation de la courbe sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0.$$

On déterminera facilement les longueurs

$$AB = -\frac{E}{C}, \quad AC = -\frac{D}{A},$$

et l'on aura l'équation du troisième côté, BC,

$$\frac{A}{D}y + \frac{C}{E}x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Pour obtenir les coordonnées du pôle P de cette droite, on prendra l'équation générale de la polaire

$$(2A\beta + B\alpha + D)y + (2C\alpha + B\beta + E)x + D\beta + E\alpha = 0. \qquad (2)$$

Et égalant les coefficients des variables, on aura les relations

$$\frac{2A\beta+B\alpha+D}{D\beta+E\alpha}=\frac{D}{A},$$

$$\frac{2C\alpha+B\beta+E}{D\beta+E\alpha}=\frac{C}{E},$$

d'où l'on tire

$$\alpha=-\frac{D}{B},\quad \beta=-\frac{E}{B}\quad \text{et}\quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{E}{D}. \qquad (3)$$

D'ailleurs l'équation de la tangente à l'origine A, est

$$Dy+Ex=0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{y}{x}=-\frac{E}{D}; \qquad (4)$$

d'où il suit que les côtés AB et AC, la droite AP et la tangente en A, forment un faisceau harmonique.

Si donc on mène entre les côtés AB et AC, une transversale quelconque parallèle à la tangente au point A, cette transversale sera divisée en deux parties égales par la droite AP, ce qui démontre le théorème.

Si l'on cherche les coordonnées du pôle P′ du côté AB, on trouvera

$$\alpha'=\frac{D^2}{2AE-BD},$$

$$\beta'=-\frac{DE}{2AE-BD}.$$

Pareillement les coordonnées du pôle P″ du côté AC sont

$$\alpha''=-\frac{DE}{2CD-BE},$$

$$\beta''=\frac{E^2}{2CD-BE};$$

d'où l'on conclut les équations des droites BP′, CP″,

$$BP'\ldots\ldots\ Y+\frac{CDE}{CD^2+2AE^2-BDE}\left(X+\frac{E}{C}\right)=0,$$

$$CP''\ldots\ldots\ Y+\frac{D}{A}+\frac{AE^2+2CD^2-BDE}{ADE}X=0.$$

Et les coordonnées de leur point d'intersection

$$X = -\frac{D^2E}{2AE^2+2CD^2-BDE},$$

$$Y = -\frac{DE^2}{2AE^2+2CD^2-BDE};$$

d'où l'on tire

$$\frac{Y}{X}=\frac{E}{D}.$$

Donc les droites AP, BP′, CP″, se coupent en un seul et même point ; ce qui vérifie une propriété connue.

Si l'on cherche la polaire du point de concours de ces droites, on trouve

$$\frac{Y}{\left(\frac{E^2}{CD-BE}\right)}+\frac{X}{\left(\frac{D^2}{AE-BD}\right)}=1.$$

Note. La même proposition peut se démontrer par la synthèse. Soit I l'intersection de BC avec la tangente en A, et O l'intersection de AP et de BC ; I est le pôle de AP ; donc les quatre points I, C, O, B, sont placés harmoniquement sur la sécante ICB ; les quatre droites AB, AO, AC, AI, forment donc un faisceau harmonique, etc.

Tm.