THIBAULT

Éléments de géométrie, par Eugène Catalan, répétiteur à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 378-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__378_0>

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE,

par Eugène Catalan, répétiteur à l'École polytechnique, etc. 1843, 1-8, xlv, 310 pages; 17 planches (*).

—

Quel est le point de perfection que doit se proposer l'auteur d'un traité élémentaire de géométrie ? Son ouvrage s'annonce comme une transition entre les idées premières, dont le fonds est commun à tous les esprits, et les profondes conceptions dont les génies les plus élevés ont construit peu à peu l'admirable édifice de la science. Sa tâche est de combler l'intervalle en ménageant toutes les liaisons, d'établir les voies les plus directes, les mieux affermies qu'il est possible en répandant partout la clarté d'une évidence complète. Il accepte un cadre donné embrassant essentiellement une certaine somme de connaissances, une collection de théorèmes d'une importance reconnue. Le mérite est d'en former un ensemble logique où tout s'harmonise, où les choses se groupent naturellement, où l'esprit puisse embrasser sans effort le chemin qu'il a parcouru. L'élève dont on veut développer les idées qui seront la base de son instruction ultérieure, réclame à la fois un fonds solide et la méthode la plus propre à étendre ce fonds et à le faire valoir.

Si tout le monde est à cet égard d'accord en principe, l'application offre des difficultés. Le grand nombre de traités qui ont paru jusqu'ici témoigne des efforts nombreux qui ont été faits, et des différences qui peuvent exister sur la manière d'envisager la question. Quel doit être d'abord le

(*) Chez Bachelier, imprimeur-libraire. Les planches sont gravées par E Wormser.

point de départ? où doit s'arrêter l'axiome pour faire place au théorème? les règles de la rigueur géométrique ne sont pas uniformément tranchées pour tous les esprits, et l'auteur d'un traité élémentaire, en butte aux critiques les plus opposées, se trouve entre des écueils également à craindre, et que, de l'avis général, des livres justement célèbres n'ont pas évités.

L'ouvrage que nous avons en vue d'analyser, paraît le résultat de réflexions approfondies à ces divers égards. On y remarque une rédaction nette, une grande précision dans les termes, et un enchaînement naturel entre les propositions. Une tradition respectée depuis Euclide, a consacré en quelque sorte la géométrie élémentaire à la méthode synthétique; c'est là que cette méthode se présente sous son jour le plus favorable; une légère induction suffisant le plus souvent pour conduire d'une vérité à la découverte d'une autre, et le principal intérêt consistant à régulariser les résultats de la manière la plus simple. En se conformant aux habitudes de l'enseignement, l'auteur n'a pas refusé le concours de l'analyse lorsque son emploi s'offrait naturellement; on ne saurait en effet trop tôt s'initier avec cette méthode qui acquiert une si grande importance dans les parties élevées de la science, où son rôle a été si brillant depuis deux siècles. Un grand nombre de questions choisies servent aussi d'aliment à cette méthode d'invention, en même temps qu'elles forment, comme application, un complément nécessaire des théories développées dans l'ouvrage. La considération des limites remplace partout la réduction à l'absurde, aujourd'hui généralement repoussée.

L'ouvrage est partagé en huit livres qui correspondent exactement et dans le même ordre à ceux de la Géométrie de Legendre. En sacrifiant peut-être ses propres idées sur le classement général des matières, il est évident que l'auteur a voulu s'adresser plus immédiatement à la grande majorité des élèves déjà familiarisés avec le plan du traité, qui depuis longtemps sert de base à l'enseignement classique. Tout en reproduisant le cadre adopté par notre célèbre géomètre, il a cherché à y introduire les modifications, les additions nombreuses dont la nécessité est reconnue.

Il laisse avec raison de côté, les dénominations vagues des trois dimensions de l'étendue ; partant des idées acquises relativement aux corps matériels, il suffit de définir les *surfaces* comme limites des corps, les *lignes* comme limites ou intersections des surfaces, les *points* comme limites ou intersections des lignes. Les corps, les surfaces, les lignes se nomment *figures* ; la *géométrie* est la science des figures.

Après avoir posé ces définitions qui nous paraissent très-convenables, l'auteur admet la notion de la ligne droite comme une idée première acquise par l'expérience, et qui se refuse à être définie. C'est en effet le terme le plus simple que notre esprit aperçoive dans le cercle des idées relatives aux grandeurs, et à ce titre il sert lui-même d'élément à la plupart de ces idées. Les notions primitives sur la ligne droite sont traduites en demandes qu'il est essentiel d'admettre, et sur lesquelles en effet il ne peut s'élever aucun doute.

La définition du *plan* telle qu'on la trouve ici, et dans tous les traités élémentaires, reproduit assez bien l'idée que nous avons de cette surface la plus simple de toutes. Cependant, comme il importe de restreindre autant que possible le nombre nécessaire des notions primitives, il conviendrait sans doute en posant cette définition de la présenter d'abord comme anticipée, et d'établir plus tard qu'elle appartient réellement à une surface engendrée suivant une certaine loi. Cette remarque a déjà été faite depuis longtemps par M. Duhamel (*Problèmes et développements sur diverses* *parties des mathématiques*, par MM. Reynaud et Duhamel).

Il paraît très-difficile de trouver une définition convenable de *l'angle*. Ce mot ou ceux d'écartement, d'inclinaison, réveillent une idée simple et précise résultant immédiatement de l'inspection de deux droites qui se coupent ; ils fixent pour notre esprit la position actuelle de ces deux lignes, l'une par rapport à l'autre. Les mots *espace infini compris entre deux droites* ne peuvent rendre cette idée qui est indépendante de la considération insaisissable de l'infini. Si l'auteur adopte cette définition à l'exemple de beaucoup d'autres ouvrages, il avertit que c'est faute d'une meilleure ; mais, ainsi que le dit Lacroix dans l'Essai sur l'enseignement, est-il indispensable de définir l'angle ? ne suffit-il pas de le montrer ?

Le premier livre, comparé à celui de Legendre, offre d'abord comme addition, divers théorèmes sur les longueurs relatives des lignes droites et brisées, sur les bissectrices des angles, etc., propositions d'une importance reconnue. Mais la principale différence ne pouvait manquer d'avoir rapport à la théorie des parallèles qu'il fallait refaire entièrement. Cette théorie, comme l'on sait, est le désespoir de la géométrie élémentaire ; de quelque manière qu'on l'ait retournée, il reste toujours une lacune entre les propositions qui s'y rattachent, et celles qu'une logique sévère a fondées sur les premiers axiomes. L'auteur a cru devoir franchir l'intervalle, en faisant intervenir littéralement sa définition de l'angle, c'est-à-dire qu'il a employé la considération d'espaces infinis de différentes grandeurs. Toutes les démonstrations proposées jusqu'ici roulent en général sur ce même fonds ; elles commencent, je crois, à être peu goûtées aujourd'hui, et l'infini est regardé comme d'autant moins abordable à la géométrie élémentaire, que l'esprit de précision de notre époque le bannit même des hautes parties de la science, où son intervention fut signalée par de si belles découvertes. Le mieux n'est-il pas d'accepter sans détour l'imperfection de la théorie des parallèles, et de la baser sur quelque demande aussi facile à accorder, que celles qui sont relatives aux notions de la ligne droite, et qui soit elle-même comme une suite nécessaire de ces notions. Au reste rien n'empêcherait, dans l'ouvrage que nous analysons, d'ériger en postulatum la première proposition de cette théorie, ce qui reviendrait à passer par-dessus une démonstration de quelques lignes, sans autres modifications.

Tous les théorèmes relatifs aux triangles, aux parallélogrammes, aux trapèzes, aux polygones quelconques dont les énoncés appartiennent au premier livre, ont été réunis sans interruption à la fin de celui-ci. L'ensemble ne peut qu'y gagner.

Si nous comparons encore le second livre à celui de Legendre, les principales différences portent d'abord sur les contacts et les intersections des cercles, qui en effet avaient besoin d'être présentés d'une manière plus satisfaisante. La mesure des angles est complétée; le cas des angles incommensurables, est traité par la méthode des limites, qui se présentent ici pour la première fois, et sert à définir nettement ce qu'on doit entendre par le rapport de quantités incommensurables. Ce livre est terminé par les théorèmes sur les polygones inscriptibles et circonscriptibles.

Viennent ensuite les problèmes qui se rapportent aux deux premiers livres, et qui offrent un ensemble très-complet.

Le troisième livre commence par la théorie des lignes proportionnelles présentée ainsi indépendamment des théorèmes sur la mesure des surfaces : cette séparation se commandait d'elle-même. De là découlent toutes les propositions sur la similitude des polygones, sur la proportionnalité des lignes homologues. Le théorème sur les bissectrices d'un angle d'un triangle et de l'angle supplémentaire, donne lieu à la division harmonique dont il serait sans doute à désirer que les propriétés les plus simples fussent du domaine de l'enseignement élémentaire. Le théorème sur le concours des médianes conduit à la considération si importante du centre des moyennes distances de trois points.

La mesure des aires des polygones et les théorèmes qui s'y rattachent forment la dernière moitié du troisième livre. Outre les propositions données dans Legendre, on y trouve le théorème sur la somme des carrés des côtes d'un quadrilatère, l'expression en fonctions des côtés de l'aire du triangle et du quadrilatère inscrit.

Parmi les problèmes placés à la fin de ce livre, citons le partage d'un trapèze par des parallèles à la base en parties proportionnelles à des nombres donnés; la construction d'un quadrilatère inscriptible de côtés donnés; quelques problèmes sur la construction d'un cercle tangent à des droites ou à des cercles donnés.

Dans le quatrième livre, relatif aux polygones réguliers et à la mesure du cercle, on remarque les expressions du côté et de l'aire en fonction du rayon pour chacun des polygones inscrits dont la construction peut s'exécuter géométriquement, et un ensemble assez complet de toutes les autres formules auxquelles peuvent donner lieu les polygones réguliers.

La transition des polygones aux figures terminées par des courbes donne lieu à une observation importante. D'accord avec l'esprit actuel de l'enseignement, avec la marche naturelle des idées, l'auteur effectue cette transition simplement en considérant ces dernières figures comme les limites vers lesquelles tendent les polygones à mesure que le nombre de leurs côtés augmente; mais peut-être trouvera-t-on qu'il a été trop loin en introduisant l'idée de limite dans les définitions mêmes. Ainsi, en se conformant aux définitions présentées jusqu'ici dans tous les ouvrages élémentaires, l'aire d'une figure curviligne ne peut-elle pas être conçue comme une portion limitée de plan sans que cette idée exige nécessairement celle de polygones dont les côtés deviennent de plus en plus nombreux? Cette observation se présente de même dans le sixième livre à l'égard des corps terminés par des surfaces courbes. Dans tous les cas l'esprit isole de l'idée de forme, celle d'espace qui en est essentiellement distincte. Toutefois, relativement aux longueurs des lignes, aux aires des surfaces, on ne peut s'empêcher de reconnaître que l'idée de limites se présente plus necessairement pour la transition des lignes droites aux lignes courbes, des surfaces planes aux surfaces courbes; aussi l'expression de longueur ne semble-t-elle pas offrir le même sens pour des lignes non superposables, de même que celle de superficie pour les surfaces qui ne peuvent s'appliquer exactement les unes sur les autres.

Le rapport de la circonférence au diamètre est obtenue par la méthode la plus simple, savoir, la méthode des isopérimètres; mais des formules données précédemment sur les polygones réguliers, on déduit de même immédiatement les autres méthodes élémentaires.

D ns un appendice au quatrième livre, on trouve une démonstration très-simple de ce théorème, que le cercle est plus grand que toute autre figure plane de même périmètre (*); il contient aussi plusieurs questions d'exercices sur les polygones réguliers.

(*) Cette démonstration est extraite d'un beau mémoire de M. Steiner, insére dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville, 1841. On peut en voir d'autres d'une grande simplicité qui s'étendent également aux surfaces sphériques, dans le tome 2e des Nouvelles annales de Mathématiques, page 480.

Le cinquième livre sur les plans et les angles polyèdres, nous paraît parfaitement remplir le cadre qu'il embrasse. Il forme une introduction aussi complète qu'on peut le désirer pour la Géométrie descriptive. On y trouve les théorèmes sur le quadrilatère gauche, sur la plus courte distance de deux droites, sur les angles trièdres supplémentaires et sur tous les cas de l'égalité des angles trièdres.

Dans le sixième livre, relatif aux polyèdres, on remarque le théorème d'Euler sur le nombre des côtés des faces et des sommets d'un polyèdre quelconque, ceux qui sont relatifs au nombre des faces d'un nombre impair de côtés, etc., à la somme des angles plans. L'égalité de volume des tétraèdres, de même hauteur et de bases équivalentes est démontrée en considérant ces tétraèdres comme les limites des prismes intérieurs formées sur des sections parallèles aux bases. On pourrait regretter de ne pas trouver aussi la belle démonstration de ce théorème, telle qu'elle est dans Legendre, indépendamment de la considération des limites. L'égalité des polyèdres de faces égales, démontrée par M. Cauchy, forme un des plus beaux théorèmes de la géométrie; son absence laisse dans cet ouvrage, comme dans tous ceux qu'on a publiés jusqu'ici, une lacune qu'il serait à désirer de voir combler.

Plusieurs problèmes importants sont traités à la fin de ce livre, particulièrement la recherche de la hauteur d'un tétraèdre de côtés donnés, le partage d'un tronc de pyramide en parties proportionnelles à des nombres donnés par des plans parallèles aux bases, l'expression du volume du rhomboèdre, du dodécaèdre rhomboïdal en fonction du côté.

Dans le septième livre, nous remarquerons les théorèmes sur la sphère inscrite ou circonscrite à un tétraèdre, à un polyèdre régulier ; la construction des cinq polyèdres réguliers.

Un appendice à ce livre traite des figures symétriques, par rapport à un point, à une droite ou à un plan. Il contient aussi diverses questions sur la sphère et les polyèdres réguliers; nous indiquerons les suivantes : Trouver le rayon d'une sphère solide, construction d'un quadrilatère sphérique inscriptible de côtés donnés, lieu des sommets des triangles sphériques de même base et de même surface, expressions des rayons de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite à chacun des cinq polyèdres réguliers, expressions des aires et des volumes de chacun de ces polyèdres en fonction du rayon de la sphère circonscrite.

Relativement au huitième livre nous parlerons seulement de l'appendice qui le termine. Entre plusieurs problèmes d'exercice sur les corps ronds, on y trouve cette proposition importante, que parmi tous les corps de même surface, la sphère est celui du plus grand volume. La démonstration de cette proposition paraît pour la première fois dans un traité de géométrie.

On ne peut qu'applaudir aux efforts du jeune auteur pour compléter les éléments d'une science qu'il expose avec tant de clarté et de rigueur ; il aurait été à désirer que l'on eût joint le théorème de Cauchy sur les polyèdres, qui remplit enfin une si ancienne lacune.

La table des matières placée en tête du volume, renferme les énoncés de tous les théorèmes, de tous les problèmes ; ce qui facilite non-seulement les recherches mais encore les moyens d'étude ; les élèves peuvent repasser à vue, et ce tableau synoptique fait voir le développement de l'arbre de la science, depuis le germe initial jusqu'aux rameaux, les plus élevés de la tige.

En résumé, malgré quelques moyens de démonstration que nous nous sommes permis de critiquer, sauf quelques définitions entachées de puritanisme, nous croyons que l'ouvrage élémentaire de M. Catalan, déjà avantageusement connu par des travaux plus relevés, occupera une place honorable dans la littérature géométrique.

THIBAULT.

Licencié ès sciences, professeur de mathématiques.