Nouvelles annales de mathématiques

Midy

Construction des formules, $\sin(a \pm b), \cos(a \pm b)$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 374-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__374_1>

CONSTRUCTION DES FORMULES, $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur des colleges royaux.

Les formules qui donnent les sinus et cosinus des sommes ou des différences de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs, ne sont prouvées dans la plupart des ouvrages élémentaires qu'au moyen de constructions et de démonstrations qui sont assez compliquées.

Les élèves nous sauront peut-être gré de leur faire connaître celles qui suivent, recueillies dans un des examens pour l'École polytechnique, à Paris, et qui, par leur simplicité, me paraissent pouvoir être substituées avec avantage aux solutions connues.

Soient AB, *fig.* 55, le diamètre d'un cercle, et ACBD un quadrilatère inscrit. Prenons le rayon de ce cercle pour celui des lignes trigonométriques, ou pour unité, faisons l'arc $BC = 2a$ et $BD = 2b$.

Alors les cordes BC, BD seront égales, la première à $2\sin a$, la seconde à $2\sin b$, et les cordes AC et AB à $2\cos a$ et $2\cos b$; par suite l'on aura

$$\text{corde CD} = 2\sin(a+b).$$

Donc, en s'appuyant sur le principe connu que le produit des deux diagonales du quadrilatère est égal à la somme des produits des côtés opposés, l'on aura

$$2 \times 2\sin(a+b) = 2\sin a \times 2\cos b + 2\cos a \times 2\sin b,$$

et par suite

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b.$$

En vertu du même principe, les *fig.* (56), (57) et (58), dans la dernière desquelles on suppose CI = BD, donneront sans peine les trois autres relations connues:

$$\sin(a-c) = \text{etc.}$$

Note. Le théorème sur le quadrilatère inscrit et la formule des cordes se trouvent pour la première fois dans l'Almegeste de Ptolémée (liv. I, ch. IX). Carnot s'est appuyé indirectement sur ce théorème pour démontrer les formules trigonométriques (*Géom. de position*, p. 155). Ce sont celles qu'on vient de lire; nous rappellerons une autre démonstration consignée dans *le Géomètre* (p. 161).

1° On a les deux identités

$$\sin(2^q - A) = \sin A, \qquad \cos(2^q - A) = -\cos A;$$

2° Soit un triangle ABC et Aa, Bb, Cc les trois hauteurs; on a l'équation évidente $AC.Bb = Aa.Ba + Aa.aC$, et de là

$$\frac{Bb}{AB} = \frac{Aa.Ba}{AC.AB} + \frac{Aa}{AB}\cdot\frac{aC}{AC},$$

ou bien $\sin A = \sin(B+C) = \sin C\cos B + \sin B\cos C$;

3° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; elle passe par les points b et c, et coupe la hauteur Aa en un point O; on a, par la propriété des sécantes,

$$Ab.AC = \overline{Aa}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{Aa}^2 - Ba.aC;$$

d'où

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Aa}{AB}\cdot\frac{Aa}{AC} - \frac{Ba}{AB}\cdot\frac{aC}{AC},$$

ou bien $\cos A = -\cos(B+C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C$;

4° Soit A′ l'angle adjacent et supplémentaire à A, on a $\sin B = \sin A\cos C + \sin C\cos A$, $\sin A = \sin A'$, $\cos A = -\cos A'$, donc $\sin B = \sin(A' - C) = \sin A'\cos C - \sin C\cos A'$;

5° $\cos B = \sin A\sin C - \cos A\cos C$, donc

$$\cos B = \cos(A' - C) = \sin A'\sin C + \cos A'\cos C.$$

(Voir tome II, p. 309.) Tm.