A. PEYRONNY

Construction géométrique du rapport $\frac{a^p}{b^p}$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 371-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__371_0>

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU RAPPORT $\frac{a^p}{b^p}$.

PAR M. A. PEYRONNY,
Élève interne du collége Saint-Louis. (Classe de M. Vincent)

Il arrive quelquefois que dans certaines constructions géométriques, on est conduit à déterminer deux lignes dont le rapport soit égal à une puissance quelconque du rapport de deux autres lignes, et on y parvient toujours au moyen de troisièmes, et de quatrièmes proportionnelles successives. Je me propose d'exposer ici une méthode plus simple, et qui a surtout l'avantage de représenter par la figure elle-même, la suite de toutes les opérations.

Soient a et b les deux lignes données, p la puissance entière et positive, à laquelle on suppose élevé le rapport de ces deux lignes. Il s'agit de déterminer deux droites m et n, telles que l'on ait $\frac{m}{n}=\frac{a^p}{b^p}$.

1. On connaît la construction à effectuer, lorsque p est une puissance exacte de 2.

Il faut construire un triangle rectangle ayant a et b pour côtés, comprenant l'angle droit: abaisser du sommet une perpendiculaire sur l'hypoténuse, puis rabattre sur cette perpendiculaire l'un des deux segments de l'hypoténuse; répéter sur le triangle rectangle ayant pour côtés ces deux segments, l'opération que l'on vient d'effectuer sur le premier et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on ait abaissé autant de perpendiculaires que p contient de fois la puissance de 2. Alors le rapport des deux derniers segments est le rapport cherché.

2. Considérons maintenant le cas ou p est un nombre impair.

Je vais déterminer le rapport $\frac{m}{n} = \frac{a^p}{b^p}$, au moyen de deux lignes m'' et n'', dont je supposerai le rapport égal à $\frac{a^{p-2}}{b^{p-2}}$.

Je prends deux droites rectangulaires, *fig.* 54, et sur ces deux droites je porte à partir de leur point d'intersection, deux longueurs OA et OB respectivement égales à a et à b; puis deux autres lignes OM et ON égales, l'une à m'', et l'autre à n''. Je mène ensuite par les points M et N, les droites MM′ et NN′ parallèles à AB.

Les deux triangles OMM′ et ONN′ sont semblables et donnent

$$\mathrm{OM}' = \mathrm{OM}\frac{a}{b},\ \mathrm{ON}' = \mathrm{ON}\,\frac{b}{a};$$

d'où
$$\frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{ON}'} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^{p-2}}{b^{p-2}} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^p}{b^p},$$

et $\frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{ON}'}$ est le rapport cherché $\frac{m}{n}$.

On aurait pu donner aux droites OM et ON (OM par ex.), des positions différentes par rapport aux axes, telles que OM_1, OM_2, OM_3, alors la droite MM_1, aurait pris l'une des positions $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1'$, $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_2'$, $\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3'$, la seconde étant parallèle à AB, et les deux autres étant perpendiculaires à cette ligne. Il est évident, qu'en supposant égales entre elles les lignes OM, OM_1, OM_2, OM_3, il en serait de même des lignes OM′, OM'_1, OM'_2, OM'_3; et que l'on aura

$$\frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{ON}'} = \frac{\mathrm{OM}'_1}{\mathrm{ON}'} = \frac{\mathrm{OM}'_2}{\mathrm{ON}'} = \frac{\mathrm{OM}'_3}{\mathrm{ON}'} = \frac{a^p}{b^p}.$$

Supposons que l'on ait $p = 3$, alors le rapport $\frac{m''}{n''}$ n'est autre chose que le rapport $\frac{a}{b}$, et les deux lignes OM et ON peuvent être représentées par OA et OB. On voit alors, que si nous menons les droites AA_1 et BB_1, perpendiculairement à AB, nous aurons $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{a^3}{b^3}$.

De même $\frac{OA_1}{OB_1}$ représentant le rapport $\frac{m''}{n''}$, dans le cas où l'on suppose $p = 5$, on aura en menant les lignes A_1A_2, B_1B_2 parallèlement à AB, $\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{a^5}{b^5}$.

Et continuant ainsi à tracer les lignes A_2A_3, A_3A_4... B_2B_3, B_3B_4..., successivement perpendiculaires et parallèles à AB, on obtiendra les différentes valeurs de toutes les puissances impaires du rapport $\frac{a}{b}$.

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{a^3}{b^3}, \ \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{a^5}{b^5}, \ \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{a^7}{b^7}, \ \frac{OA_4}{OB_4} = \frac{a^9}{b^9}\ldots, \text{ etc.}$$

3. Les deux modes de construction que je viens d'exposer nous permettent de déterminer le rapport $\frac{a^p}{b^p}$ quel que soit p.

Car p pouvant contenir le facteur 2 à une certaine puissance k, on aura $p = p'.2^k$, p' étant un nombre impair, et par suite $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a^{2k}}{b^{2k}}\right)^{p'}$. La première méthode nous fait connaître le rapport $\frac{m'}{n'} = \frac{a^{2k}}{b^{2k}}$, et la seconde le rapport

$$\frac{m}{n} = \frac{m'^{p'}}{n'^{p'}} = \frac{a^{p'.2k}}{b^{p'.2k}} = \frac{a^p}{b^p}.$$

4. Au lieu de construire $\frac{a^{p'}}{b^{p'}}$, en passant par toutes les puissances impaires moindres que p', il est préférable de

décomposer p' en ses facteurs premiers α, β, γ,... et de construire successivement

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1{}^\beta}{n_1{}^\beta}=\frac{a^{\alpha\beta}}{b^{\alpha\beta}},\quad \frac{m_3}{n_3}=\frac{m_2{}^\gamma}{n_3{}^\gamma}=\frac{a^{\alpha\beta\gamma}}{b^{\alpha\beta\gamma}},$$

et ainsi de suite ; α, β, γ... sont tous des nombres premiers, mais plusieurs peuvent être égaux entre eux.

Il peut arriver que les facteurs premiers de p' soient des nombres assez grands, mais qu'il n'en soit pas de même du nombre p' diminué d'un nombre pair $2.c$. Alors il faudra construire le rapport $\frac{a^{p'-2c}}{p^{p'-2c}}$, on déterminera ensuite le rapport $\frac{a^{p'-2(c-1)}}{p^{p'-2(c-1)}}$, puis $\frac{a^{p'-2(c-1)}}{b^{p'-2(c-1)}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{a^{p'}}{b^{p'}}$.

Nous remarquerons que dans le second mode d'opérations les lignes qui expriment le rapport cherché, vont l'une en augmentant, et l'autre en diminuant, et que l'avantage de la précision est ainsi uni à celui de pouvoir effectuer toutes les opérations sur une portion de surface plane peu étendue.