H. FAURE

Problème 44

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 365-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__365_1>

PROBLÈME 44 (t. I, p. 519).

PAR M. FAURE (H.),
élève en spéciales.

Par le foyer d'une parabole on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon; puis sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole, comme diagonale, on construit un rectangle. Quel est le lieu du sommet opposé au foyer?

Soit M (*fig.* 53) un point du lieu cherché, ω et ρ ses coordonnées polaires, ω' et ρ' celles du point K de la parabole. Si l'on observe que la tangente en un point d'une parabole forme des angles égaux avec le rayon vecteur qui va au point de contact et l'axe focal, on aura la relation

$$\omega' - \omega = 90^\circ - \frac{\omega'}{2},$$

d'où

$$\omega' = 60^\circ + \frac{2\omega}{3}.$$

Dans le triangle rectangle FMK l'on a

$$\rho' = \rho \cos(\omega' - \omega);$$

et puisque

$$\cos(\omega' - \omega) = \sin\frac{\omega'}{2} = \sin\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right),$$

il vient $$\rho'=\rho \sin\left(30^\circ+\frac{\omega'}{3}\right).$$

Le point K étant sur la parabole dont l'équation au foyer est

$\rho=\frac{p}{1-\cos\omega}$, l'on a $\rho'=\frac{p}{1-\cos\omega'}$.

Substituant dans cette expression la valeur trouvée pour ω' et ρ', on aura pour l'équation du lieu

$$\rho \sin\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right)=\frac{p}{1-\cos\left(60^\circ+\frac{2\omega}{3}\right)};$$

mais

$$1-\cos\left(60^\circ+\frac{2\omega}{3}\right)=2\sin^2\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right);$$

donc

$$\rho=\frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right)}.$$

Discussion. Pour $\omega=\omega'$ on trouve la même valeur de ρ que pour $\omega=360^\circ-\omega'$; la courbe est donc partagée en deux parties symétriques par l'axe polaire. De plus, si l'on fait $\omega=\omega'$ et $\omega=540^\circ+\omega'$, on a pour ρ deux valeurs égales et de signes contraires. Il faudra alors porter la seconde valeur de ρ dans le prolongement du rayon vecteur formant l'angle de $540^\circ+\omega'$ avec l'axe polaire, de sorte qu'on aura le point déjà obtenu $\omega=\omega'$. Par conséquent, en faisant varier ω de 540° à 1080°, on aura les points déjà obtenus en faisant varier ω depuis 0 jusqu'à 540°.

On voit encore qu'il ne sera pas nécessaire de donner à ω des valeurs supérieures à 1080°, car l'équation déterminant alors pour ρ la même valeur que quand ω était $<1080^\circ$, la partie de courbe déterminée par ces valeurs se trouve déjà tracée. Comme d'ailleurs les valeurs négatives de ω ne sauraient fournir de nouveaux points, la courbe sera construite en faisant passer ω par les valeurs comprises entre 0 et 540°.

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour} & \omega = 0 & \text{on a} & \rho = 4p = \mathrm{FR}, \\
 & \omega = 90^\circ & & \rho = \dfrac{4p}{3\sqrt{3}} = \mathrm{FS}, \\
 & \omega = 180^\circ & & \rho = \dfrac{p}{2} = \mathrm{AF}. \\
 & \omega = 270^\circ & & \rho = \dfrac{4p}{3\sqrt{3}} = \mathrm{FS'}, \\
 & \omega = 360^\circ & & \rho = 4p = \mathrm{FR}, \\
 & \omega = 450^\circ & & \rho = \infty, \\
 & \omega = 540^\circ & & \rho = -4p.
\end{array}$$

Ainsi la courbe cherchée coupe l'axe polaire à la distance $\mathrm{OR} = 4p$; elle s'approche de plus en plus du pôle à mesure que ω augmente ; et pour $\omega = 180^\circ$, elle vient passer par le sommet A. On obtient ensuite la branche symétrique de RMA. L'angle ω continuant sa marche, à partir de 360°, ρ va en augmentant, et ce rayon devient infini pour $\omega = 450^\circ$. Les valeurs supérieures de ω donnent la branche symétrique de celle-ci.

D'après cette discussion, il semblerait que la perpendiculaire élevée par le pôle à l'axe polaire est une asymptote de la courbe ; mais il n'en est rien, ainsi qu'on va le voir.

Soit ζ la distance d'un point quelconque de la courbe à la perpendiculaire NN', on aura

$$\zeta = \rho \cos \omega = \frac{p \cos \omega}{2 \sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right)};$$

et ce qu'il s'agit de trouver c'est la véritable valeur de ζ qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $\omega = 450^\circ$.

Développant le dénominateur et remplaçant cos ω par sa valeur en fonction du tiers de l'arc, on trouve :

$$\frac{\zeta}{p} = \frac{4\cos^3\frac{\omega}{3} - 3\cos\frac{\omega}{3}}{\cos^3\frac{\omega}{3} + 9\sin^2\frac{\omega}{3}\cos\frac{\omega}{3} + 3\sqrt{3}\sin\frac{\omega}{3}} =$$

$$= \frac{4\cos^2\frac{\omega}{3} - 3}{\cos^2\frac{\omega}{3} + 9\sin^2\frac{\omega}{3}\,3 + \sqrt{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{3}}.$$

On sait que

$$\sin^2\frac{\omega}{3} = \frac{\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{3}}{1+\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{3}}, \qquad \cos^2\frac{\omega}{3} = \frac{1}{1+\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{3}};$$

posant $\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{3} = x$, et remplaçant,

$$\frac{\zeta}{p} = \frac{1-3x^2}{1+3\sqrt{3}x+9x^2+3x^3\sqrt{3}} = \frac{1-3x^2}{(1+x\sqrt{3})^3}.$$

Supprimant le facteur commun $1+x\sqrt{3}$, aux deux termes de cette fraction,

$$\frac{\zeta}{p} = \frac{1-x\sqrt{3}}{(1+x\sqrt{3})^2}.$$

Ainsi c'était le facteur $1+x\sqrt{3}$ qui, en s'annulant dans l'hypothèse de $\omega = 450^\circ$, masquait la vraie valeur de la fraction qui se réduit à l'infini. Donc la perpendiculaire NN′ n'est pas une asymptote de la courbe, et même nous allons voir que cette courbe n'a aucune asymptote. Pour y parvenir, cherchons le coefficient angulaire de la tangente, qui nous servira aussi à mener des tangentes aux points remarquables de la courbe. On a, comme on sait, $\mathrm{tang}\,M = \rho \lim \frac{h}{k}$, et la sous-tangente polaire $S = \rho^2 \lim \frac{h}{k}$.

Il s'agit de déterminer la limite de $\frac{h}{k}$.

On a

$$\rho = \frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right)} \quad \text{et} \quad \rho + k = \frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega+h}{3}\right)},$$

équation que l'on peut transformer ainsi :

$$\rho = \frac{p}{3\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \cos\omega}, \quad \rho+k = \frac{p}{3\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \cos(\omega+h)}$$

puis, après avoir renversé les deux membres de ces équations, je les retranche et je trouve

$$-\frac{k}{\rho(\rho+k)} = \frac{3\left[\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \sin\left(\frac{90^\circ+\omega}{3}\right)\right] + \cos\omega - \cos(\omega+h)}{2p}$$

$$= \frac{3\cos\left(\frac{180^\circ+2\omega+h}{6}\right) + \sin\left(\omega+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{p},$$

d'après les formules connues de trigonométrie ; puis :

$$-\frac{k}{\rho(\rho+k)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{h}{6}\left[3\cos\left(\frac{180^\circ+2\omega+h}{3}\right) + 3h\left(\omega+\frac{h}{2}\right) + 4\sin^2\frac{h}{6}\sin\left(\omega+\frac{h}{3}\right)\right]}{p};$$

d'où

$$-\frac{6}{\rho(\rho+k)} \cdot \frac{k}{h} =$$

$$= \frac{\sin\frac{h}{6}}{\frac{p}{6}} \times \frac{3\cos\frac{180^\circ+2\omega+h}{3} + 3\cos\left(\omega+\frac{h}{3}\right) - 4\sin^2\frac{h}{6}\sin\left(\omega+\frac{h}{2}\right)}{p},$$

passant à la limite, on trouvera

$$\lim.\frac{h}{k} = -\frac{2p}{\rho^2\left[\cos\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right) + \sin\omega\right]},$$

par conséquent

$$\tang M = -\frac{2p}{\rho\left[\cos\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right)+\sin\omega\right]},$$

et

$$S = -\frac{2p}{\cos\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right)+\sin\omega}.$$

Pour avoir les asymptotes il faut trouver ce que devient la valeur de S lorsque $\rho=\infty$. Alors $\omega=450^\circ$, partant $S=\infty$; puis donc que S n'a pas de limite, la courbe ne peut avoir d'asymptote.

La considération des tangentes va nous permettre de tracer la courbe plus exactement;

pour $\quad \omega = 0 \quad$ on a $\quad S = -\frac{4p}{\sqrt{3}},$

$\omega = 360 \qquad S = \frac{4p}{\sqrt{3}}.$

Si donc, à partir du point F, on prend les deux distances FN, FN′ triples de FS, en joignant le point R aux points N, N′, on aura la direction des tangentes au point R. La tangente en A est perpendiculaire à l'axe, par conséquent cette tangente se confond avec celle qui est menée au même point à la parabole.

Si l'on résout l'équation

$$1-\cos\omega = 2\sin^3\left(30^\circ+\frac{\omega}{3}\right),$$

on verra qu'elle ne donne que la seule valeur réelle $\omega=180^\circ$; ce qui prouve que la courbe ne rencontre la parabole qu'au point A seulement.

Note. Cette belle discussion peut s'abréger en adoptant la formule donnée par M. Rispal (tome II, p. 512). Tm.