Nouvelles annales de mathématiques

Louis Ferrier

Lieu géométrique d'un point du grand axe d'une ellipse qui se meut en restant tangente à deux droites fixes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 352-361

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__352_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE

d'un point du grand axe d'une ellipse qui se meut en restant tangente à deux droites fixes.

PAR M. LOUIS FERRIER,
eleve du college royal de Mâcon.

La solution générale que nous allons donner de ce problème est fondée sur cette propriété de l'ellipse, que, si on décrit sur le grand axe comme diamètre une circonférence, les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes se trouvent tous sur cette circonférence.

I. Supposons d'abord que le point pris sur l'axe soit le foyer, et que les deux tangentes soient rectangulaires. Si on considère l'ellipse dans une quelconque de ses positions, on obtiendra les coordonnées du foyer, en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les deux tangentes. Les pieds de ces perpendiculaires se trouveront, d'après le théorème que nous venons de citer, sur une circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, et le problème sera ramené au suivant :

Étant donnés une circonférence de cercle et un point F *situé à une distance* c *du centre, trouver la relation qui existe entre les deux droites rectangulaires menées du point* F *à la circonférence* (fig. 44).

Posons $FP = y$, $FQ = x$, $OP = a$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Les deux triangles OFP et OFQ nous donneront :

$$\cos OFP = \frac{c^2 + y^2 - a^2}{2cy} = \frac{y^2 - b^2}{2cy} = -\cos AFP,$$

$$\cos OFQ = \frac{c^2 + x^2 - a^2}{2cx} = \frac{x^2 - b^2}{2cx} = -\sin AFP.$$

Ajoutant ces deux équations, après les avoir élevées au carré, on trouve

$$(1)\quad \left(\frac{y^2 - b^2}{2cy}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - b^2}{2cx}\right)^2 = \cos^2 AFP + \sin^2 AFP = 1.$$

Cette équation peut se mettre aussi sous la forme :

$$\left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 + \left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 = 4c^2;$$

et c'est sous cette forme qu'on la trouverait immédiatement, en exprimant que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est égal à b^2, et que la distance des deux foyers est égale à $2c$.

Il résulte de la solution que nous avons donnée et de l'énoncé même du problème, que l'on devra trouver la même équation pour la courbe décrite par le second foyer, et que pendant que le premier foyer décrira une portion de la courbe, le deuxième foyer décrira l'autre. Quant à l'équation (1), elle nous montre immédiatement, d'après sa forme, que l'origine est un centre, que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices, et que les portions de la courbe comprises dans les angles yox', $y'ox'$ et $y'ox$ sont tout à fait semblables à la partie comprise dans l'angle yox. Nous pouvons donc, dans tout ce qui va suivre, nous contenter de considérer cette dernière portion de courbe décrite par une ellipse qui ne sort pas de l'angle yox. On remarque encore que l'équation est satisfaite par $x=0$ et $y=0$; mais il ne faut pas en conclure que la courbe passe à l'origine, car si l'on résout l'équation par rapport à y, et que l'on cherche les conditions de réalité des racines, on trouve que les valeurs de x, et par suite celles de y (à cause de la symétrie), sont comprises entre $a+\sqrt{a^2-b^2}$ et $a-\sqrt{a^2-b^2}$. L'origine est donc un point isolé. On conclut encore de là que la courbe n'a pas de branches infinies; ce que nous annoncent aussi les considérations géométriques du problème.

En résolvant l'équation, on trouverait facilement la forme de la courbe tracée dans la figure 45 · mais nous préférons construire la courbe par points et la discuter d'après cette construction.

Au point F élevons une perpendiculaire au diamètre OF, et prenons pour axes les lignes FA et FB. Cela fait, voici comment on construira les différents points de la courbe : par le point F on mènera deux droites rectangulaires quelconques, et on considérera les lignes FA, FD comme les abscisses, et les lignes FB, FC comme les ordonnées. Ensuite, on rabattra par des arcs de cercle ces longueurs sur les axes FX, FY, et prenant, pour chaque abscisse, les deux ordonnées correspondantes, on déterminera quatre points de la courbe. En continuant ainsi, on trouvera la forme de courbe indiquée par la figure 45.

Nous allons maintenant chercher les points remarquables. Occupons-nous des limites parallèlement à l'axe des y. On sait que si, par un point F pris dans un cercle, on mène différentes lignes, la plus petite et la plus grande sont les lignes FA et FD comptées sur le diamètre qui passe par le point F, et que de FA à FD la ligne menée du point F à la circonférence va toujours en croissant. Il résulte de là que FA et FD seront les limites des abscisses. Et comme, dans ce cas, à la même abscisse correspondent deux ordonnées égales FI et FC, on obtiendra par la considération de ces ordonnées, pour l'abscisse FA, deux points réunis en un seul au point K ; et pour l'abscisse FD, deux autres points réunis en R. Comme la courbe est symétrique par rapport aux bissectrices des angles des axes, les limites prises parallèlement à l'axe des abscisses seront absolument les mêmes que pour l'axe des ordonnées. On aura ainsi deux autres points extrêmes N et L

On peut déterminer facilement les points où la courbe coupe la bissectrice ; il suffit pour cela de faire au point F, de chaque côté du diamètre, un angle de 45 degrés. On aura alors quatre coordonnées égales deux à deux, qui seront celles des points cherchés.

2. On peut construire la courbe d'une autre manière aussi simple. Pour cela nous remarquons que, si nous décrivons du centre de l'ellipse une circonférence avec un rayon égal à a, nous couperons les axes en quatre points dont les distances à l'origine seront les coordonnées des foyers. Les longueurs de ces lignes ne dépendent donc que des diverses positions du centre pendant le mouvement de l'ellipse. Or il est facile de voir que le centre décrit un arc de cercle limité par deux parallèles aux axes, IG et QS menées à la distance b; car

il est toujours distant du sommet de l'angle droit formé par les deux tangentes, de la quantité constante $\sqrt{a^2+b^2}$, et sa plus courte distance à la tangente est égale à b. On peut remarquer que le centre décrit deux fois le même arc, puisqu'il ne peut pas dépasser deux lignes fixes, et qu'après la rotation entière de l'ellipse, il rèvient à sa première position.

La portion de cercle comprise entre les deux parallèles étant tracée, d'après les remarques précédentes, il suffira, pour déterminer les différents points de la courbe, de décrire de tous les points de cet arc de cercle une circonférence d'un rayon égal à a, qui coupera les deux axes chacun en deux points. On obtiendra ainsi les coordonnées de quatre points, et on déterminera, en opérant ainsi, la forme de la courbe déjà trouvée (*fig.* 45).

Il est bien évident qu'on aura les points limites en décrivant la circonférence des deux extrémités de l'arc rn, et les points situés sur la bissectrice en la décrivant du milieu de cet arc.

3. Connaissant le lieu décrit par le foyer, nous allons déterminer facilement celui d'un point quelconque pris sur l'axe.

Soit M ce point pris sur l'axe (*fig.* 44). Il est facile de voir, en menant les coordonnées du point M et les coordonnées parallèles du foyer, que si on projette M sur FP et FQ en H et E, les lignes PH et QE seront les coordonnées (x', y') du point M. Il résulte de là que si nous pouvons exprimer FP et FQ (y, x) au moyen de PH et QE (y', x'), en substituant les valeurs de y et de x dans l'équation du foyer, nous aurons une relation entre x' et y'. Soit FM $= l$. On a

$$y = y' + \text{HF}, \quad \text{HF} = l \cos \text{BFA} = l\frac{(b^2 - y^2)}{2cy},$$

d'où

$$y = y' + l\frac{(b^2 - y'^2)}{2cy};$$

ou bien en effectuant :

$$(2c+l)y^2 - 2cyy' - lb^2 = 0.$$

En posant $(2c+l) = h$ et $(2c+l)\,lb^2 = k$, on tire de là la valeur

$$y = \frac{cy' \pm \sqrt{c^2y'^2+k}}{h}.$$

On voit bien que l'on aura aussi

$$x = \frac{cx' \pm \sqrt{c^2x'^2+k}}{h}.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons pour l'équation du lieu cherché :

$$(2) \qquad \left[c\,(k+b^2h^2)\,y' + (k-b^2h^2)\sqrt{c^2y'^2+k}\right]^2 + \\ + c\,(k-b^2h^2)\,x' + (c-b^2h^2)\sqrt{c^2x'^2+k} = 4c^2\ (^*).$$

En élevant au carré et faisant les opérations nécessaires pour l'évanouissement des radicaux, on arrive à une équation en x' et y' du huitième degré. Mais après quelques préparations, on voit qu'elle ne contient que des termes en $x'y'$, $x'^2+y'^2$, $x'^4+y'^4$ ou bien $\left((x'^2+y'^2)^2 - 2x'^2y'^2\right)$; et que par conséquent en la transformant en coordonnées polaires, elle sera fonction de ρ et de $\sin 2\omega$. En élevant au carré une seconde fois, on trouve une équation bicarrée par rapport à $\sin 2\omega$, qu'on peut résoudre par rapport à cette variable.

4. Voyons maintenant si, en faisant certaines hypothèses, on ne pourrait pas faire disparaître immédiatement les radicaux.

Cela arrive évidemment lorsqu'on pose $c=0$, $k+b^2h^2=0$, ou bien encore $k-b^2h^2=0$.

En développant ces deux dernières conditions, elles nous donnent les relations $l=-c$ et $c=0$.

La première relation, $l=-c$, nous indique que le point M

(*) Cette équation n'étant pas homogène est évidemment fausse. Tm.

est le centre même de l'ellipse. En faisant dans l'équation (2) $k + b^2h^2 = 0$ et $l = -c$, on trouve un cercle dont le rayon est égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Nous voyons, d'après la valeur $c = 0$, que l'ellipse se change en une circonférence; et en faisant cette hypothèse dans l'équation, on trouve le résultat $x'^2 + y'^2 = l^2$, c'est-à-dire que le point M décrit un cercle dont le rayon est l. Ce qui était évident *à priori*.

Si le point M est le sommet, l'équation n'offre rien de remarquable.

5. Maintenant nous supposerons que l'angle des deux tangentes soit quelconque, et nous aurons à chercher :

Le lieu géométrique des points du grand axe d'une ellipse qui se meut en restant tangente à deux droites fixes faisant un angle quelconque.

Si nous rapportons la courbe à ces deux tangentes fixes prises pour axes, les coordonnées de ses différents points s'obtiendront en divisant par l'angle des axes les perpendiculaires abaissées du point décrivant sur ces lignes. La question est donc ramenée à trouver une relation entre ces perpendiculaires.

En supposant d'abord que le point que l'on considère soit le foyer, nous reprendrons les calculs comme dans le problème précédent. Seulement, arrivé au point où la première solution exige que l'angle PFQ soit droit, il faudra seulement exprimer que cet angle est constant. Voici comment nous continuerons les calculs :

Posons $\quad \cos \mathrm{PFQ} = m = \cos(\mathrm{PFA} + \mathrm{AFQ})$.

Nous déduisons de là

$$(m - \cos \mathrm{PFA} \cos \mathrm{AFQ})^2 = \sin^2 \mathrm{PFA} \sin^2 \mathrm{AFQ}.$$

Il suffit maintenant, pour avoir notre relation cherchée, de remplacer $\cos \mathrm{PFA} \cos \mathrm{AFQ}$ et $\sin^2 \mathrm{PFA} \sin^2 \mathrm{AFQ}$ par leurs valeurs en fonctions de x et y, valeurs trouvées dans le premier problème.

On déduira de ce lieu celui d'un point quelconque pris sur l'axe, tout à fait de la même manière que dans la première partie.

Ainsi le problème est résolu généralement pour un point quelconque du grand axe.

6. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le point qui décrit la courbe est un point quelconque de l'axe. Si nous supposons maintenant que ce point soit pris comme on voudra sur le plan de l'ellipse, l'angle OFM, au lieu d'être égal à deux angles droits, sera égal à un angle constant quelconque ; et la seule différence entre ce cas et celui que nous avons examiné précédemment, proviendra de ce que le cosinus de l'angle HFM, au lieu d'être égal à $-\cos \text{OFP}$, sera égal à $\cos(\text{OFM} - \text{OFP})$. Le sinus de l'angle OFP entrera dans l'expression de $\cos \text{HFM}$, et si on calcule sa valeur au moyen de celle de $\cos \text{OFP}$ trouvée précédemment, on introduira y' sous un radical, dans l'expression de y ; alors l'équation qui donne la valeur de y au moyen de y' ne sera plus du second degré. On aura bien encore, de cette manière, un nombre suffisant d'équations pour résoudre le problème ; mais on ne pourra pas faire l'élimination comme dans le cas précédent.

Note. 1. On parvient directement et promptement à ces solutions en faisant usage de nos formules générales. Prenons les deux tangentes pour axes des coordonnées ; on aura $l = l' = 0$; or $m = \text{B}^2 - 4\text{AC}$; remplaçant A, B, C par leurs valeurs en k, k', L, il vient

$$\frac{4\text{L}^2}{m^3} = \frac{2kk'n}{m^2} + \frac{n^2}{m^2} = \frac{r}{\sin^2\gamma} ;$$

où r négatif est le produit des carrés des demi-axes dans l'ellipse, et r positif le même produit dans l'hyperbole. On a

$$N = A + C - B\cos\gamma = \frac{k^2 + k'^2 + 2(kk' + mn)\cos\gamma}{4L}$$

et
$$\frac{4LN}{m^2} = \frac{k^2 + k'^2 + 2(kk' + mn)\cos\gamma}{m^2} = s;$$

dans cette expression, s est la somme algébrique des carrés des demi-axes (t. I, p. 493, VII); ainsi r et s sont des quantités données.

2. *Centre.* Soient x et y les coordonnées du centre; donc

$$x = \frac{k}{m};\ y = \frac{k'}{m};$$

on a donc

$$\frac{n^2}{m^2} + 2xy\frac{n}{m} = \frac{r}{\sin^2\gamma}$$

et
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma + 2\frac{n}{m}\cos\gamma = s;$$

éliminant $\frac{n}{m}$, il vient

$$(y^2 + x^2 - s)^2 - 4x^2y^2\cos^2\gamma = r\cot^2\gamma;$$

lieu du centre; courbe du 4e degré, n'ayant point de branches infinies et du premier genre (Euler, Introd, t. II, lib. II, § 261); si $\gamma = 1^q$, elle se réduit à un cercle double.

3. *Foyer.* Soient X et Y les coordonnées du foyer, et toujours x et y celles du centre; on a $X = \alpha - x$; $Y = \beta - y$; $\alpha^2\sin^2\gamma = x^2\sin^2\gamma - b^2$; $\beta^2\sin^2\gamma = y^2\sin^2\gamma - b^2$ (t. II, p. 430);

car
$$\frac{4AL}{m^2} = \frac{k^2}{m^2} = x^2; \quad \text{et} \quad \frac{4CL}{m^2} = y^2;$$

d'où $(x + X)^2\sin^2\gamma = x^2\sin^2\gamma - b^2$, et de là

$$x = -\frac{b^2 + X^2\sin^2\gamma}{2X\sin^2\gamma},$$

et de même
$$y = -\frac{b^2 + Y^2\sin^2\gamma}{2Y\sin^2\gamma};$$

substituant ces valeurs dans le lieu du centre, il vient

$$[b^4(X^2+Y^2)+Y^2X^2(Y^2+X^2-4s)\sin^4\gamma+4b^2Y^2X^2\sin^2\gamma]^2-$$
$$-4X^2Y^2[b^2+X^2\sin^2\gamma][b^2+Y^2\sin^2\gamma]\cos\gamma=16rY^4X^4\cos^2\gamma\sin^6\gamma,$$

lieu des foyers ; courbe dû 12° degré. Si $\gamma = 1^q$, la courbe est du 6° degré et la même que celle de M. Ferrier. Ceci est pour l'ellipse et l'hyperbole ; pour la parabole dont le paramètre est donné, $\frac{L}{N^3}$ est une quantité constante $= p^2$ (t. I, p. 494) ; $4L^2 = 2kk'n$; $N = \frac{k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma}{4L}$. α et β étant les coordonnées du foyer, on a $\alpha = \frac{-k'n}{4NL}$; $\beta = -\frac{kn}{4NL}$ (t. II, p. 432) ; d'où l'on déduit facilement

$$p^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma) = \alpha^2\beta^2.$$

Si $\gamma = 1^q$, on trouve l'équation (3) de la p. 299, t. I.

4. Pour un point quelconque du plan, *voir* a solution de M. Rispal, p. 226 de ce volume. Tm.