NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Les deux propriétés fondamentales des diamètres conjugués, dans les coniques, d'après Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 345-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__345_0>

LES DEUX PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS, DANS LES CONIQUES,

d'après Apollonius.

—

On sait que ces deux propriétés sont l'une des plus belles découvertes du grand géomètre ; il y a peut-être encore quelque intérêt, au moins historique, à connaître sa marche ; elle est même plus simple que celle qui est communément en usage. Nous allons indiquer la suite des propositions nécessaires telles qu'on les trouve dans le livre VII ; et parce qu'elles sont un moyen d'exercice, nous supprimons les démonstrations, et nous rendons les énoncés conformes au langage moderne.

Proposition II.

A sommet d'une hyperbole, A′ second sommet ; T un point sur AA′ entre A et A′, tel que l'on ait $\frac{A'T}{AT} = \frac{AA'}{\text{paramètre}}$; soit AB une corde quelconque ; BE une perpendiculaire sur l'axe A′A prolongé ; on aura $\frac{\overline{AB}^2}{TE.AE} = \frac{AA'}{A'T}$.

Observation. La longueur AT est homologue au paramètre dans la proportion qui sert à déterminer le point T, et comme cette longueur revient dans presque toutes les propositions du VII[e] livre, Apollonius appelle cette longueur *l'homologue*, nom caractéristique que nous conserverons ; si nous désignons cette longueur par h, on aura $h = \frac{2ap}{2a+p}$ où a est le demi-axe transverse, et p son paramètre.

PROPOSITION III.

A sommet d'une ellipse, A' autre sommet sur le même axe; T un point sur le *prolongement* de AA', tel qu'on ait $\frac{A'T}{AT} = \frac{AA'}{A'T}$; le reste comme dans la proposition précédente.

Observation. On a $h = \frac{2ap}{2a-p}$.

PROPOSITION IV.

AA' axe d'une hyperbole ou d'une ellipse; C le centre, CB un demi-diamètre quelconque; CH le demi-diamètre conjugué; BE une perpendiculaire sur l'axe; BD une tangente rencontrant l'axe en D; on a $\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CH}^2} = \frac{DE}{CE}$.

Observation. La proposition V est relative à la parabole.

PROPOSITION VI.

A et A' deux sommets d'une hyperbole; C le centre; AT *l'homologue* par rapport au sommet A; A'T' *l'homologue* par rapport au sommet A (*voir* proposition II), de sorte qu'on a AT = A'T'; les points T et T' sont entre A et A'; B point pris sur l'hyperbole dont le sommet est A; BD une tangente en B, rencontrant l'axe AA' en D; CB un demi-diamètre; *CH le demi-diamètre conjugué à CB; AL corde parallèle à* CH et à BD; LM perpendiculaire abaissée sur l'axe; on aura

$$\frac{CB^2}{CH^2} = \frac{MT}{MT'}.$$

PROPOSITION VII.

Même proposition pour l'ellipse, les points T et T' sont sur le prolongement de l'axe AA'.

PROPOSITION VIII.

Mêmes constructions et notations qu'en VI et VII Soit

Y une moyenne proportionnelle entre MT et MT′, on aura

$$\frac{AA'^2}{4\,[CB^2+CH^2]}=\frac{A'T'.MT}{[MT+Y]^2}.$$

PROPOSITION IX.

Mêmes constructions et notations qu'en VI, VII et VIII; on a

$$\frac{A'T'.MT}{[MT-Y]^2}=\frac{AA'^2}{4\,[CB-CH]^2}.$$

PROPOSITION X.

Mêmes constructions et notations; on a $\frac{AA'^2}{4.CB.CH}=\frac{A'T'}{Y}$, ellipse.

PROPOSITION XI.

Même proposition pour l'hyperbole.

PROPOSITION XII.

Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des carrés des axes.

PROPOSITION XIII

Dans l'hyperbole, la différence des carrés des axes est égale à la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques.

Observations. Apollonius déduit ces deux dernières propositions des propositions VII et VIII, qui reviennent identiquement à celle-ci : la somme (algébrique) des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur un axe est égale au carré de cet axe; au lieu d'un axe on peut même prendre un diamètre, pourvu qu'on fasse les projections parallèlement au diamètre conjugué à celui sur lequel on projette; ainsi la méthode analytique de M. Gergonne (t. I, p. 245) est la traduction algébrique de la méthode synthétique d'Apollonius

Proposition XXXI.

Si l'on mène deux diamètres conjugués quelconques dans l'ellipse, ou entre les hyperboles conjuguées, le parallélogramme construit avec ces diamètres, est égal au rectangle construit sur les axes; pourvu que les angles du parallélogramme soient égaux aux angles formés au centre pour les diamètres conjugués.

Apollonius n'a ici recours qu'à la proposition IV; conservons les mêmes constructions et notations; par H menons une tangente rencontrant en I la tangente BD et en D' l'axe AA', la figure CBIH est un parallélogramme; et on sait par la géométrie élémentaire que l'aire de ce parallélogramme est une moyenne proportionnelle entre les aires doublées des triangles semblables DBC, D'HC; or, d'après la proposition IV, Apollonius démontre facilement, empruntant le langage moderne, que l'aire doublée du triangle DBC est $\frac{ya^2}{x}$ et l'aire doublée du triangle D'HC est $\frac{xb^2}{y}$; a, b étant les demi-axes principaux; et x et y les coordonnées du point B, donc l'aire du parallélogramme est ab, etc.

La proposition IV est une transformation de celle-ci : le produit des distances des extrémités d'un diamètre D à deux diamètres conjugués quelconques est égal au produit des distances, à ces mêmes diamètres, de l'extrémité du diamètre conjugué à D; c'est l'interprétation géométrique de la troisième équation de M. Gergonne (t. I, p. 246).

III. Apollonius ne donne pas la solution du problème où il s'agit de trouver les axes au moyen de deux diamètres conjugués. Cette solution se trouvait probablement dans le livre VIII[e] qui ne nous est pas parvenu; elle est d'ailleurs une conséquence de la proposition IV, puisqu'on en déduit que le produit des deux segments d'une tangente interceptée entre les deux axes est égal au carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point de contact ; ce qui subsiste encore lorsqu'on remplace les axes par des diamètres conjugués quelconques.

C'est précisément, en se fondant sur cette propriété, que Pappus donne la solution du problème, dans le huitième et dernier livre de la collection (Prop. XIV). Comme il a dédié ce livre à son fils Hermodore, à l'usage duquel, dit-il, il a réuni, tout ce qui se trouve d'épars dans les écrits de divers géomètres et surtout d'Apollonius, qu'il ne fait que commenter et transcrire, il est probable que cette solution que Pappus a placée dans son huitième et dernier livre est celle qu'Apollonius avait mise aussi dans son huitième et dernier livre ; on peut étendre cette construction à l'hyperbole. Euler, dans ses mémoires, donne trois constructions différentes pour résoudre ce problème. (*Novi-Comment.* VII, 1750-51) ; au moyen des diamètres conjugués, il trouve la direction du diamètre égal à l'un d'entre eux ; dès lors la bissection d'un angle donne les directions des axes.

IV. Dans ces derniers temps, M. Chasles a indiqué pour l'ellipse, cette construction d'une élégance remarquable. Soit O le centre de la courbe ; OA, OB, deux demi-diamètres conjugués ; par le point A, on abaisse une perpendiculaire AI sur OB ; et sur cette perpendiculaire, on prend de part et d'autre AE, AE′ égaux à OB ; on tire les droites OE, OE′ ; les bissectrices de l'angle EOE′, et de son supplément sont les axes principaux de l'ellipse, le grand axe est égal à la somme des droites OE, OE′ et le petit axe est égal à leur différence, et le grand axe traverse l'angle aigu formé par les diamètres conjugués donnés.

L'auteur a été conduit à cette construction en résolvant le problème analogue pour les surfaces du second degré. (*Aperçu historique*, p. 45) ; la vérification immédiate est facile. Soit $OA = a$, $OB = AE = AE' = b$, $\sin BOA = \sin\gamma$; prenons OA pour axe des x, OB pour axe des y; il vient $AI = a\sin\gamma$, $EI = a\sin\gamma - b$, $E'I = a\sin\gamma + b$, $OE^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\gamma$, $OE'^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin\gamma$; ainsi, d'après les deux propriétés fondamentales, $OE + OE'$ est égal au grand axe, et $OE - OE'$ ou $OE' - OE$ égal au petit axe; les coordonnées du point E sont $b\cot\gamma$, $a - b\,\text{coséc.}\gamma$; l'équation du diamètre OE est donc $y = \dfrac{b\cos\gamma}{a\sin\gamma - b}x$, et celle du diamètre OE' est $y = -\dfrac{b\cos\gamma}{a\sin\gamma + b}$.

Les deux coefficients angulaires vérifient l'équation 13 (T. II, p. 29), dans laquelle $A = a^2$, $B = c$, $C = b^2$; ainsi les diamètres OC, OE' sont égaux, donc, etc. Cette belle construction ne s'applique pas à l'hyperbole; en désignant par K le point où un axe principal rencontre la droite EE' il est facile de démontrer directement que l'on a $\dfrac{OE}{OE'} = \dfrac{KE}{KE'}$; donc l'axe est une bissectrice de l'angle EOE'.

Un prochain article sur les noms des coniques, les paramètres et les foyers, selon Apollonius. Tm.