NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Note sur les quantités négatives

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 321-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__321_0>

NOTE

SUR

LES QUANTITÉS NÉGATIVES.

(Fin.—Voir p. 318.)

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur à l'École polytechnique.

—

Les signes propres à marquer le sens des grandeurs étaient arbitraires *à priori*. Mais on voit que les signes habituels ont un avantage considérable, et que leur adoption entraîne forcément la règle qu'on pratique dans l'addition algébrique, règle qui entraîne à son tour celle de la soustraction.

Que dirons-nous maintenant de la multiplication ? Comme l'introduction d'une forme particulière du nombre, de la forme fractionnaire, nécessite que l'on modifie en arithmétique les définitions de la multiplication ; s'étonnerait-on qu'il fallût modifier encore cette même définition au moment où on introduit dans le calcul un aspect nouveau de la grandeur, un élément qui est indispensable à sa détermination complète, et que jusque-là on avait négligé ?

Nous dirons que « la multiplication a pour objet de trou- » ver une grandeur qui soit composée en quantité *et en signe* » avec le multiplicande, de la même façon que le multipli- » cateur est composé avec l'unité positive. »

La règle des signes des monômes découle avec clarté de cette définition, puisque toutes les fois que le multiplicateur aura comme l'unité le signe $+$, le produit aura le même signe que le multiplicande ; au lieu que si le multiplicateur est de sens opposé à l'unité, le signe du produit aura un signe contraire à celui du multiplicande.

Il résulte aussi de cette définition que, si on change le signe de l'un de ces facteurs, le signe du produit est changé ; au lieu que le produit conserve son signe, lorsqu'on change à la fois les signes des deux facteurs. Et cette remarque suffira pour qu'on puisse étendre immédiatement, à tous les cas de la multiplication des polynômes, la règle des signes qu'on aura d'abord démontrée, comme M. Finck, pour le cas seulement où ces polynômes ont une valeur numérique positive.

Les choses ainsi établies, il n'y aura, ce me semble, rien d'imprévu pour les élèves, lorsqu'ils rencontreront plus tard, dans la résolution d'une équation, une quantité négative pour valeur de l'inconnue. Ils sauront bien que la justesse d'une telle solution est subordonnée à la question de savoir si la quantité cherchée comporte dans l'ordre concret une formation en double sens. Sinon, il faudra bien, pour que la question proposée ait une signification raisonnable, en modifier l'énoncé de telle sorte que cette quantité inconnue soit comptée dans un sens opposé à celui qu'on avait pris d'abord. Mais quoi qu'il en soit, les solutions négatives leur apparaîtront de prime abord ce qu'elles sont en effet, c'est-à-dire un résultat nécessaire de la généralité absolue du calcul algébrique.

Dans son *Introduction à la Philosophie des Mathématiques,* M. Hoëné Wronsky a dit avec raison, ce me semble, que les caractères particuliers qu'on nomme état *positif* et état *négatif* des nombres portent sur leur QUALITÉ ; tandis que les opérations d'addition et de soustraction ne portent que sur leur QUANTITÉ. « C'est, dit l'auteur, le défaut de cette distinction » très-simple qui, jusqu'à ce jour, a couvert de tant d'obscu- » rité les questions algorithmiques concernant l'état positif » ou négatif des nombres. » (*Introd.*, 1808, pag. 159.)

Note. Kant a essayé d'introduire en philosophie l'idée des grandeurs négatives (*). Dans la préface de l'opuscule consacré à cet essai, l'auteur se plaint de ce que la philosophie, au lieu de mettre à profit les doctrines mathématiques, le plus souvent se montre hostile contre elles, et cherche à les réduire en pures abstractions, n'ayant qu'une utilité spéciale. Il est facile de deviner, dit-il, de quel côté est l'avantage dans cette lutte entre deux sciences, dont l'une surpasse tout en certitude et en clarté, tandis que l'autre aspire seulement à acquérir ces qualités. Nous recommandons cette réflexion aux jeunes philosophes de l'École normale, qui doivent sans cesse se rappeler que Platon, Aristote, Spinosa, Mallebranche, Clarke, étaient très-versés dans les connaissances géométriques et physiques de leur temps; j'ai omis Descartes et Leibnitz, hommes hors rang, génies créateurs. Mais revenons à notre sujet.

Kant distingue deux sortes d'oppositions : l'une, qu'il appelle *logique*, implique une contradiction, et l'autre n'implique point de contradiction. Ainsi le *mouvement* et le *repos* forment une opposition *logique* et ne sauraient se rencontrer dans le même objet. Mais la diversité de direction donne lieu à une opposition de la seconde espèce, d'une existence possible ; le même bâtiment peut être poussé par un vent qui vient de l'est et par un autre soufflant de l'ouest ; un homme peut avoir simultanément un *actif* et un *passif*. Dans le premier cas, on établit deux propositions qui s'excluent : A est B, proposition affirmative ; A n'est pas B, proposition qui contient une négation ; les deux ne sauraient être simultanément vraies. Dans le deuxième cas, on a ces deux propositions : A est augmenté de B ; A est diminué de B ; les deux peuvent exister simultanément, et le résultat est que

(*) Versuch den Begriff der negativen Groessen in die Weltweisheit einzuführen, 1763. in-12 de 72 pages

A ne change pas. C'est ce dernier genre d'opposition qu'on rencontre en mathématiques ; mais, comme dans l'opposition logique, on a conservé en algèbre le nom de proposition *affirmative* ou positive à l'une, et le nom de proposition *négative* à l'autre. Quand l'essence des deux quantités est telle qu'elles ne peuvent exister ensemble en égale grandeur sans se détruire, si l'on appelle *positive* l'une quelconque de ces grandeurs, l'autre sera dite *négative*. Ainsi, quoique empruntées à la logique, les qualifications *positive* et *négative*, jointes au mot *quantité*, n'ont pas le sens logique, et M. Transon fait voir clairement comment les deux signes $+$ et $-$ ont un double emploi. Ils représentent des augmentations et des diminutions, et en même temps une opposition. M. Cauchy ne donne même le nom de *quantité* qu'au *nombre* précédé d'un signe ; de sorte que « le signe $+$ ou $-$ placé devant un nombre en modifie la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. » (*Cours d'analyse*, p. 2.)

Il est probable que ce sont des questions d'arithmétique qui ont donné naissance à l'algèbre ; on donnait à deviner des nombres sur lesquels on avait fait mentalement diverses opérations. Comme les nombres pensés étaient toujours positifs, on ne trouvait jamais que des solutions positives ; s'il arrivait qu'elles fussent négatives, on les déclarait *fausses ;* c'est-à-dire que l'opérateur avait fait de fausses combinaisons. De là le nom de *racines fausses ;* et quoique Descartes eût découvert le véritable emploi des *racines négatives*, il leur a pourtant conservé le nom de *racines fausses*, établi par l'usage (*voyez* t. II, p. 550). L'origine très-probable de cette dénomination est indiquée par Kæstner (*Geschichte der Mathematik*, t. I, § 48). On voit d'ailleurs que Diophante (*) dédie son ouvrage à un certain Denis (Dionysius), qui désirait beau-

(*) A vécu avant 1760.

coup connaître l'explication des questions qui concernent les nombres. « J'ai essayé, dit-il, d'établir une méthode et de chercher la nature et les propriétés des nombres, en les déduisant des premières bases fondamentales sur lesquelles s'appuie cette théorie. L'entreprise peut paraître difficile (ignorée même jusqu'ici), surtout auprès des commençants, dont l'esprit n'est pas porté à bien espérer du succès. Toutefois ton zèle et mes démonstrations feront que tu comprendras facilement. On se fait comprendre vite, quand l'enseignement s'adresse à ceux qui ont le désir de s'instruire. » Diophante connaît la règle des signes et la place, sans démonstration, parmi les premiers principes, comme chose généralement connue (IX). Il n'a pas de signe pour représenter *plus* et se sert du mot υπαρξίσ, qui veut dire *abondance;* mais pour le signe *moins*, il prend la lettre grecque ψ écourtée et renversée, de cette forme ⋔.

Tm.