NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUILMIN

Questions d'examen résolues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 307-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__307_0>

QUESTIONS D'EXAMEN,

RÉSOLUES

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'Ecole normale, professeur de mathématiques.

PREMIÈRE QUESTION.

De combien de manières le premier membre d'une équation du degré $2m$ peut-il se décomposer en facteurs du second degré?

Désignons, pour abréger, par a, b, c.... h, k, l, les $2m$ facteurs binômes. $x-\alpha$, $x-\beta$, etc., correspondant aux diverses racines, réelles ou imaginaires, de l'équation.

Précisons la question : Combien peut-on écrire de listes de facteurs du deuxième degré, telles que le produit des facteurs de chaque liste soit égal au premier membre de l'équation proposée? Deux listes différant au moins par un facteur.

Pour former ces listes, on peut procéder comme suit :

Je prends le facteur a, que je multiplie par b. Réservant d'abord le produit ab, je suppose qu'on ait résolu le problème proposé pour le produit des $2m-2$ facteurs restants, et obtenu toutes les décompositions différentes qu'il demande; soit P''_{2m-2} le nombre de ces décompositions. A chacune des listes obtenues, je joins le produit réservé ab, et j'ai une première série de P''_{2m-2} décompositions différentes du produit des $2m$ facteurs proposés.

Je joins ensuite au facteur a un facteur c autre que b; je réserve ce produit; je forme toutes les listes différentes de facteurs du deuxième degré des $2m-2$ facteurs restants;

j'en ai encore P''_{2m-2}; à chacune je joins ac, et j'ai une nouvelle série de listes de produits de $2m$ facteurs, lesquelles sont différentes des premières. Je joindrai ainsi successivement le facteur a à chacun des $2m - 1$ facteurs restants, et chaque fois j'aurai P''_{2m-2} listes. Cela fait, je les aurai évidemment toutes; car dans l'une quelconque des listes demandées, a doit être joint à l'un des $2m - 1$ autres facteurs, et se trouver absent des autres produits du deuxième degré. De là résulte évidemment la formule

$$P''_{2m} = P''_{2m-2} \times (2m - 1).$$

En changeant successivement

$$m \text{ en } m - 1,\ m - 2, \ldots\ldots m - (m - 1),$$

et multipliant les égalités résultantes, on obtient la formule,

$$P''_{2m} = 1.3.5.7\ldots.(2m - 1)$$

Corollaire. Étant donné un polynôme entier de degré impair $(2m+1)$, de combien de manières peut-on le décomposer en un produit de facteurs du deuxième degré, multiplié par un facteur du premier? Soient a, b, c .... h, k, l, n, les facteurs du premier degré. On laissera d'abord n de côté; on formera toutes les listes de facteurs du deuxième degré relatives aux $2m$ facteurs restants, lesquelles seront au nombre de $P''_{2m} = 1.3.5.7\ldots(2m - 1)$.

En joignant à chaque décomposition le facteur réservé n, on aura une série de décompositions relatives à la question actuelle. En isolant d'abord successivement chacun des $2m + 1$ facteurs, on aura autant de séries différentes. Le nombre des listes est donc $1.3.5.7\ldots.(2m - 1)(2m + 1)$.

Deuxième question.

De combien de manières peut-on décomposer un produit de $3\,m$ facteurs $a, b, c, \ldots. e, h, k$ en facteurs ou diviseurs du troisième degré? Cette question est analogue à la précédente.

Je mets à part le facteur a, et je forme toutes les combinaisons des $3m-1$ facteurs restants pris 2 à 2; il y en a $\frac{(3m-1)(3m-2)}{1.2}$.

Je multiplie a par l'un de ces produits de deux facteurs, bc par exemple; réservant le produit abc ainsi obtenu, je forme toutes les décompositions indiquées par la question appliquée au produit des $3m-3$ facteurs, autres que a, b, c; soit P'''_{3m-3} le nombre des listes obtenues. A chacune d'elles j'ajoute le produit abc, et j'ai ainsi une liste de diviseurs du troisième degré dont le produit est celui des $3m$ facteurs donnés. Ayant fait cela pour les P'''_{3m-3} listes, j'ai un nombre égal de décompositions du produit donné.

Je multiplie a par une autre combinaison des facteurs restants, bd par exemple; j'opère comme précédemment sur les $3m-3$ facteurs restants; puis joignant à chaque décomposition du produit de ces $3m-3$ facteurs le produit abd, j'obtiens une série de P'''_{3m-3} décompositions relatives au produit proposé de $3m$ facteurs; ces dernières listes sont différentes des premières, puisque dans le diviseur qui contient a dans chacune, ce facteur est constamment joint à bc dans les premières et à bd dans les dernières. Quand on aura fait usage, de la même manière, de toutes les combinaisons de deux facteurs autres que a, on aura toutes les décompositions possibles. Dans chaque liste en effet, a doit accompagner une combinaison de deux des facteurs restants, et être absent des autres produits. On a évidemment

$$P'''_{3m} = P'''_{3m-3}\frac{(3m-1)(3m-2)}{1.2}.$$

Remplaçant successivement m par $m-1, m-2, \ldots m-(m-1)$ et multipliant toutes les égalités obtenues membres à membres on trouve

$$P'''_{3m} = \frac{1}{1.2}\left(1.2.4.5.7.8\ldots\ldots(3m-2)(3m-1)\right).$$

On obtiendrait exactement de la même manière, le nombre des décompositions d'un produit de facteurs du premier degré, en diviseurs d'un degré quelconque, si l'on suppose le degré du produit multiple de celui d'un diviseur.

Exemple : calculer P^p_{pm}

Soit C_{p-1} le nombre des combinaisons des $pm-1$ facteurs autre que a, pris $p-1$ à $p-1$. On aura la formule $P^p_{pm} = P^p_{pm-p}\, C_{p-1}$. D'où l'on déduira la valeur de P^p_{pm} par la méthode indiquée.

TROISIÈME QUESTION.

Si on demande le nombre de décompositions en diviseurs du degré p accompagnés d'un seul diviseur du degré q, pour un produit de $pm+q$ facteurs du premier degré $(q<p)$: il suffira évidemment de trouver le nombre de décompositions en facteurs du degré p pour un produit de pm facteurs et de multiplier le nombre P^p_{pm} obtenu par celui des combinaisons q à q de tous les facteurs du produit proposé de $pm+q$ facteurs.

En effet chacune des listes demandées s'obtient en mettant à part q des facteurs proposés, et y joignant ensuite chacune des décompositions, en facteurs du degré p, du produit des pm facteurs restants.

Pendant que je m'occupe de combinaisons, je crois utile de mettre ici une solution plus simple du problème des mots (tome Ier, page 14).

QUATRIÈME QUESTION.

Je reproduis l'énoncé. Déterminer le nombre des mots que l'on peut former avec 19 consonnes et 5 voyelles, chaque mot étant composé de 3 consonnes et de 2 voyelles, en excluant tous les mots renfermant trois consonnes de suite.

Je vais d'abord former sans exclusion, tous les mots de 3 consonnes et 2 voyelles.

Pour que deux mots soient identiques, il faut, 1° que toutes les lettres soient les mêmes dans les deux; 2° qu'abstraction faite des consonnes, les voyelles y occupent la même position relative, c'est-à-dire, offrent le même arrangement: 3° que les voyelles effacées, il en soit ainsi des consonnes; 4° que ces trois conditions remplies, la même lettre ait la même place dans les deux mots (*).

Cela posé je forme les arrangements complets des 19 consonnes 3 à 3; il y en a 19^3; *id.* des 5 voyelles 2 à 2; il y en a 5^2. Je prends l'un des premiers *bcd*; l'un des seconds *ae*, et je forme tous les mots dans lesquels les 3 consonnes *b*, *c*, *d* offrent, abstraction faite des voyelles, l'arrangement *bcd*, et les voyelles semblablement, l'arrangement précité. Pour le faire avec ordre et sûrement, je forme les combinaisons des 5 numéros de places 1,2,3,4,5 pris 2 à 2; j'écris les numéros de chaque combinaison dans l'ordre de leurs grandeurs; à côté de chacune j'écris la combinaison des 3 numéros restants, aussi par ordre de grandeurs. On obtient le tableau ci-contre :

1.2	3.4.5
1.3	2.4 5
1.4	2.3.5
1.5	2.3.4
2.3	1.4.5
2.4	1.3 5
2.5	1.3.4
3.4	1.2.5
3.5	1.2.4
4.5	1.2.3

Chaque combinaison de 2 numéros, et sa correspondante de 3 me servent à former un mot avec les consonnes et les voyelles choisies. Le 1er chiffre de la combinaison de 2 numéros indique la place de *a*, le 2e celle de *e*. Le 1er chiffre de la correspondante de 3 indique la place de *b*, le 2e celle de *c*, le 3e celle de *d* dans l'ordre de l'arrangement.

(*) Cette condition est suffisante à elle seule, et comprend implicitement les trois autres ; on verra pourquoi j'ai cependant énoncé celles-ci.

Exemples : les 6^{mes} combinaisons donnent le mot *baced*.

Nous avons ainsi $\frac{5\times4}{2}$ ou 10 mots, pour lesquels les 3 premières conditions sont remplies, mais la quatrième ne l'est pas. Ces mots sont donc différents, et ce sont les seuls qui puissent satisfaire à ces 3 premières conditions lorsqu'on fait usage des arrangements adoptés. Avec le même arrangement *ae* j'emploie un autre arrangement quelconque de consonnes. En opérant de même j'aurai 10 mots différents entre eux à cause de (4°) non remplie ; et différents des précédentes d'après la condition 3° non remplie, si les consonnes sont les mêmes que dans l'arrangement *bcd*, ou d'après 1° *id.*, s'il n'en est pas ainsi.

Employant ainsi, avec le même arrangement *ae* de voyelles, tous les arrangements complets de consonnes, j'obtiens des mots différents au nombre de $\frac{5\times4}{2}\times 19^3$.

Prenant au lieu de *ae*, un autre arrangement de voyelles, et opérant comme avec *ae*, j'aurai un nombre égal de mots différant entre eux d'après ce qui vient d'être dit, et des précédents d'après 2° ou 1°.

Et ainsi de suite après avoir employé tous les arrangements complets de 2 voyelles, nous aurons des mots au nombre de $\frac{5\times4}{2}\times 19^3\times 5^2$.

Évidemment nous avons tous les mots possibles de 3 consonnes et de 2 voyelles ; car pour chacun les consonnes effacées, les voyelles doivent offrir un certain arrangement ; de même pour les consonnes, lorsqu'on effacerait les voyelles.

Considérons à part les mots qu'il faut exclure d'après la fin de l'énoncé. On les obtiendrait isolément de la manière suivante.

On prendra l'arrangement *ac* et l'arrangement *bcd*, par exemple. On mettra le deuxième en bloc, comme une seule lettre, à toutes les places possibles relativement à celles de l'arrangement *ae*, ce qui donne les mots *aebcd*, *abcde*, *bcdae*, au nombre de 3 ; les seuls qui, pour la disposition relative *ae* des voyelles, contiennent l'arrangement des consonnes *bcd* consécutives. Tous les arrangements de consonnes étant ainsi employés avec le même arrangement *ae*, nous aurons pour chacun 3 mots, et pour tous, 3×19^3 mots, différents les uns des autres, à cause de 3° ou 1° non remplie. Si nous employons de même tous les arrangements complets de voyelles, nous aurons en tout $3 \times 19^3 \times 5^2$ mots à retrancher. De sorte que définitivement le nombre demandé est

$$\frac{5 \times 4}{2} \times 19^3 \times 5^2 - 3 \times 19^3 \times 5^2.$$

La formule donnée (t. I, p. 48) doit être rectifiée ; le premier terme doit être divisé par 2, comme le deuxième. Cela vient de ce que, dans la formation des mots contenant 3 consonnes et 2 voyelles différentes (p. 46), il y aura double emploi pour chaque mot ; on a le même mot, par exemple, lorsque dans *abcd*, on met *e* à la première place, et lorsque dans *ebcd*, on met *a* à la deuxième (*eabcd*). Il faut donc diviser par 2 le nombre des mots obtenus dans les conditions de ce paragraphe. La formule ainsi modifiée devient

$$19^3 \times 5 \times 4 \times \frac{5 \times 4}{2} + 19^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5 - 19^3 \times 5^2 \times 3 =$$

$$= 19^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5\,(4 + 1) - 19^3.5^2.3 =$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times 19^3 \times 5^2 - 19^3.5^2.3.$$

C'est la considération de la formule ainsi modifiée qui m'a fait penser à la solution que je propose aujourd'hui.

CINQUIÈME QUESTION.

Trouver, par des considérations *à priori*, combien il y a de nombres différents dans la table de Pythagore.

Il suffit évidemment de se rendre compte des causes de répétition, pour distinguer les nombres sur lesquels elles influent.

D'après le principe relatif à l'interversion de deux facteurs, $3 \times 7 = 7 \times 3 = 21$, si l'on a égard à la disposition de la table, on verra que 21 sera le septième de la troisième colonne horizontale et le troisième de la septième colonne *id.* Ce nombre est ainsi répété deux fois. Il en est ainsi pour tous les deux produits de deux facteurs inégaux, c'est-à-dire pour tous ceux de la table, excepté les carrés. Cette remarque s'applique donc à 72 produits, parmi lesquels on ne trouvera au plus que 36 nombres différents : joignons-y les 9 carrés, cela en fera 45. On peut les mettre à part dans la table, en tirant une ligne diagonale le long des carrés, sur leur droite, par exemple. Tous les nombres à gauche sont les 45 produits indiqués.

Si un produit est double dans cette partie de la table, ce n'est plus à cause de l'interversion des facteurs : nous n'y aurons plus égard.

Tous les nombres moindres que 10, qui ne sont pas premiers, donnent lieu à répétition.

Ainsi $4 = 1.2^2$ donne les produits 1.4 et 4×1 en isolant 1; si 1 n'est pas isolé, on ne doit plus y avoir égard, et $4 = 2^2 = 2 \times 2$; ce qui répète ce produit ailleurs que dans les premières colonnes, horizontales ou verticales. Il en est de même évidemment de 6, 8, 9; (4 nombres à déduire).

Si, en dehors des causes précédentes, deux produits sont égaux, c'est qu'ils sont composés des mêmes facteurs premiers, et que ces facteurs premiers peuvent se partager au moins de deux manières, en deux groupes de facteurs, tels que le produit des facteurs de chaque groupe soit moindre que 10.

Les facteurs premiers qui entrent dans nos produits sont 2, 3, 5, 7. Or un produit dans lequel entre 5 ou 7 ne peut se répéter dans nos 45 nombres. En effet, en groupant les facteurs, on est obligé de laisser 5 ou 7 tout seul; car si on lui adjoignait un autre facteur, au moins 2, le groupe donnerait au moins 10 : il n'y a donc qu'une manière de partager un tel produit en deux facteurs.

Il n'y a donc qu'à s'occuper des nombres qui comprennent pour facteurs premiers, soit 2 seul, soit 3 *id.*, soit 3 et 2, en ne dépassant pas 81. 2^2, 2^3 ont été considérés dans la remarque précédente; de même, 2×3, 3^2. Nous n'avons qu'à considérer :

1° 2^4, 2^5, 2^6. $2^4 = 2 \times 2^3 = 2^2 \times 2^2$. (1 répétition.)
$2^5 = 2^2 \times 2^3$. Pas d'autre; car on ne peut mettre 2^4 pour un des facteurs. 2^6 ne donne que $2^3 \times 2^3$ pour la même raison.

Parmi les puissances de 3, nous n'avons, en outre de 9 déjà considéré, que 3^3 et 3^4, qui ne fournissent chacun qu'un produit, 3×3^2 et $3^2 \times 3^2$.

2° $2^2.3 = 4 \times 3 = 2 \times (2 \times 3)$ (1 répétition).
$2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 2^2 \times (2 \times 3)$ (1 répétition).
$2^4.3$ n'en donne pas; car on ne peut mettre que 2 avec 3 dans un groupe. De même des puissances supérieures de 2 avec la première de 3.

3° $2.3^2 = 2.9 = (2 \times 3) \times 3$ (1 répétition).
2×3^3 ne donne rien; car on doit mettre, et on ne peut mettre que 3 avec 2.

Enfin, $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ (1 répétition)

Aucune autre répétition n'est possible; car d'autres puissances de 2 ne peuvent se joindre à 3 dans un groupe, ni réciproquement. Nous avons donc en tout 9 répétitions parmi les 45 produits. En tout, 36 nombres différents dans la table de Pythagore.