NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIDY

Note sur le folium de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 293-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__293_0>

NOTE
SUR
LE FOLIUM DE DESCARTES.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur des colléges royaux.

—

1 La courbe (*fig.* 36) dont l'équation, rapportée à des axes rectangulaires, est

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0, \qquad (1)$$

est connue sous le nom de folium de Descartes. Comme on ne sait point résoudre cette équation, celle-ci ne peut faire connaître directement ni la nature ni la forme de la courbe.

Pour la transformer en une autre plus aisée à discuter, nous remarquerons qu'elle reste la même quand on y change x en y, et réciproquement. La courbe qu'elle représente est donc symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle formé par les axes des coordonnées. Il est donc facile de prévoir qu'en prenant cette droite et celle qui lui est perpendiculaire à l'origine pour nouveaux axes, la discussion sera simplifiée.

Les formules pour passer aux axes nouveaux sont

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y'),$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' + y').$$

D'ailleurs, en nommant a' la portion de la bissectrice dont la projection sur l'axe des x est a, l'on a

$$a = \frac{a'}{\sqrt{2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1) ; remplaçons, pour plus de simplicité, $\frac{3a'}{2}$ par a', et supprimons les accents, l'équation réduite sera

$$y^2(a+3x)+x^2(x-a)=0.$$

Elle donne

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}. \qquad (3)$$

L'équation mise sous cette forme, on voit de suite (*fig.* 37) que la courbe limitée à droite à l'abscisse $AB=a$, l'est à gauche, à la distance $AD=\frac{1}{3}a$, par l'asymptote VV', dont l'équation est

$$a+3x=0.$$

L'équation suivante

$$m=\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}},$$

déduite de l'équation (3) donnant pour m, à la limite $x=0$:

$$m=\pm 1,$$

fait voir que les bissectrices GL, G'L' touchent les deux branches BMAU, BM'AU' à l'origine.

2. Comparons cette courbe à celle dont l'équation est

$$y=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \qquad (4)$$

Cette seconde courbe, de même forme que la précédente, mais dont l'asymptote VV' (*fig.* 38) est éloignée de l'axe HV d'une distance $HD=AD$, est d'une construction géométrique facile. En effet, si l'on mène par B la droite arbitraire BC, l'on aura toujours, pour tous les points de la courbe, $CA=CM$. Elle est aussi le lieu des sommets des hyperboles qui, ayant le foyer commun B, ont l'axe AY pour asymptote commune. C'est ce que l'on vérifierait en cherchant directement le lieu des points qui satisfont à l'une ou à l'autre condition. Il serait curieux de chercher si la première courbe jouit de quelques propriétés analogues.

La comparaison des formules (3) et (4) fait voir qu'entre les points A et B, la première courbe est plus près de l'axe des x que la seconde, et qu'entre A et D, elle s'en éloigne au contraire davantage ; de sorte que si les deux courbes étaient construites sur la même droite AB, la première serait complétement enveloppée par la seconde.

3. Un point essentiel à déterminer, si l'on construit les deux courbes, est celui M, où, sur la partie fermée, située à droite de l'axe des y, l'ordonnée est un maximum. Nous croyons que les élèves n'attachent pas en général assez d'importance aux constructions géométriques. Ce n'est que par elles néanmoins que dans beaucoup de cas on peut se faire une idée bien nette de la forme et de l'étendue de la courbe que l'on discute. Nous les considérons d'ailleurs comme un exercice extrêmement utile pour les élèves, et très-propre à exercer leur sagacité. Elles nous semblent donc préférables sous ce rapport aux résultats déduits du calcul, et c'est par ce motif que nous allons, pour chacune des deux courbes considérées, indiquer la construction précise du point que nous venons de désigner.

La dérivée de l'équation

$$y^2(x+a)+x^2(x-a)=0$$

de la seconde courbe, prise par rapport à x et égalée à zéro, donnera les points de la courbe où la tangente est parallèle aux x, et dont l'ordonnée sera dans le cas actuel un maximum.

Or cette équation réduite est

$$x^2+ax-a^2=0.$$

En la résolvant, on a

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}.$$

Pour construire à la fois l'abscisse et l'ordonnée du point, faisons $AK = \frac{1}{2} AB$; prenons $AH = AB$; décrivons du centre K la circonférence KH, coupant l'axe des x en P et P'. Le point cherche M sera sur la perpendiculaire élevée en P sur AX, et sur la droite BN menée de B à l'extrémité N de la corde $AN = AP$. Quant au point P', on voit qu'il est hors des limites de la courbe, ou que l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP' est imaginaire.

4. Si l'on fait le calcul analogue pour l'équation

$$y^2 (a + 3x) + x^2 (x - a) = 0$$

de la première courbe, l'on trouvera, pour la condition cherchée,

$$3x^2 - a^2 = 0 ,$$

d'ou

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} .$$

Construction. Sur HB (*fig.* 37), comme diamètre, décrivez une circonférence ; faites $AE = HD = \frac{1}{3} AB$; élevez la perpendiculaire EH sur AB. Alors la corde $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Or cette corde est plus grande que AE et aussi que $AO = HO$. Donc la circonférence AH coupera le prolongement de HO en P et celui de AO en P'. Le point P' est hors des limites de la courbe. Le point P est le seul auquel correspondent les points cherchés.

Construisons l'ordonnée du même point. L'équation (3) donne

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a - x}{a + 3x} .$$

Faisons $AQ = 3AP$, sur BQ, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence rencontrée par la perpendiculaire au point P sur HX en Z, et après avoir pris QP″= HP, la parallèle P″M″ à BZ sera l'ordonnée cherchée. La même construction s'appliquant à une abscisse quelconque, on pourra donc déterminer autant de points de la courbe que l'on voudra.

La transformation dont nous avons fait usage pour discuter la courbe de Descartes doit être remarquée à cause de sa grande utilité pratique. Elle nous semble préférable, lorsqu'elle rend possible la résolution directe de l'équation primitive, à la méthode des coordonnées polaires, plus facile en apparence, mais qui, en général, dans les courbes de forme compliquée, est peu propre à indiquer d'une manière précise leur limite exacte, le sens de leur courbure et la position des asymptotes, lorsqu'il en existe.

Dans le folium de Descartes, par exemple, si on passe de l'équation primitive

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

a l'équation aux coordonnées polaires, au moyen des formules connues

$$y = \rho \sin\omega, \qquad x = \rho\cos\omega,$$

l'on trouve

$$\rho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega}.$$

Or, en posant

$$\sin^3\omega + \cos^3\omega = 0,$$

on en tire

$$\sin\omega = -\cos\omega.$$

Par suite,

$$\rho = -\frac{3a\sin^2\omega}{o} = \mp\infty.$$

d'où l'on doit conclure seulement que la courbe considérée peut avoir une asymptote parallèle à la bissectrice ZAZ′ (*fig.* 36) de l'angle YAX′. Mais ce résultat ne fait connaître ni l'existence réelle de cette asymptote, ni sa distance à la bissectrice.

Je dis son existence réelle : en effet, il pourrait se faire, dans de certains cas, que, malgré une indication de ce genre, il n'y en eût aucune.

Car soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - x^2 - y^2 = 0,$$

discutée dans les *Annales*, t. II, p. 232 ; son équation polaire est

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho = \frac{1}{0} = \pm \infty,$$

et cependant la courbe n'a pas d'asymptote, ou celle-ci est à une distance infinie de l'axe des y, ce qui, au fond, est la même chose.

6. L'auteur, d'ailleurs plein de mérite, de l'article inséré dans le même tome des *Annales*, p. 314, a été induit en erreur par une discussion de ce genre. C'est ce que je vais montrer par la discussion directe de l'équation à laquelle il est parvenu.

Cette équation est

$$y^3 - x^3 - y^2 x + y x^2 + y^2 + x^2 - xy = 0. \qquad (1)$$

Elle donne la solution d'un problème très-intéressant proposé par M. Breton de Champ. Elle est, dans une suite de parallélogrammes ACBM, A′C′B′M .... etc. (*fig.* 39), qui ont un angle commun M, et dont les côtés adjacents varient en conservant une différence constante, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des sommets C, C' .... etc., sur les diagonales opposées et correspondantes.

L'auteur a été amené par son calcul à prendre pour origine le point O de la bissectrice de l'angle AMG, où vont concourir, par une propriété fort remarquable, toutes les perpendiculaires considérées et, pour axes des coordonnées, les droites OX, OY, parallèles aux côtés de cet angle.

L'équation (1), étant du troisième degré par rapport aux deux variables, ne peut être résolue directement. L'auteur de l'article la discute par les coordonnées polaires. Mais la composition de cette équation, comme la nature même de la question, indique suffisamment que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle YOX Il est donc naturel alors de prendre cette droite OX' et sa perpendiculaire OY' pour axes coordonnés ; et c'est à ces axes nouveaux que nous allons la rapporter.

Les formules d'où dépend cette transformation sont

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y'+x'),$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y'-x').$$

L'équation transformée est, par suite,

$$y^2(2\sqrt{2}\,x-1)+2\sqrt{2}\,x^3-3x^2=0. \tag{2}$$

Elle donne

$$y=\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{2}\,x-1}}, \tag{3}$$

et devient, sous cette forme, facile à discuter.

Les valeurs de x qui satisfont aux équations particulières

$$2\sqrt{2}\,x-1=0,$$
$$3-2\sqrt{2}\,x=0,$$

étant $x'=\frac{1}{4}\sqrt{2}$ pour la première, et $x''=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ pour la seconde, il suit de l'équation (3) que les abscisses auxquelles correspondent des ordonnées réelles seront toutes comprises entre les valeurs x' et x''.

Pour interpréter ces résultats, il faut se rappeler que l'équation (1) a été obtenue en prenant le côté du carré MPOQ pour unité. Alors si on considère le carré inscrit $mpq'p'$, formé en joignant les points milieux des côtés du premier, l'on aura $OR = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $OS = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. La courbe sera donc entièrement renfermée entre les parallèles $p'q'$, pq à l'axe OY'; et si l'on fait croître x depuis x' jusqu'à x'', l'ordonnée positive correspondante décroîtra d'une manière continue depuis l'infini jusqu'à zéro.

La première de ces parallèles, et non point l'axe OY', sera donc une asymptote de la courbe, et la seconde une tangente.

Ces conséquences se trouvent vérifiées par la valeur du coefficient angulaire de la tangente, qui est

$$\operatorname{tang}\varphi = \mp \frac{8x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 3}{(2\sqrt{2}\,x - 1)\sqrt{(2\sqrt{2}\,x - 1)(3 - 2\sqrt{2}\,x)}}. \quad (4)$$

Le numerateur a ses racines imaginaires et ne peut en conséquence devenir *ni nul, ni négatif*. Donc, en adoptant le signe supérieur qui convient à la partie SPU de la courbe, ce coefficient est constamment négatif, ou l'angle que fait la tangente avec OSX' est toujours obtus.

Pour $x = x' = x''$ la valeur de $\operatorname{tang}\varphi$ devient infinie. Ce qui prouve de nouveau que $p'q'$ est une asymptote, et sa parallèle pq une tangente au sommet. De S à U la courbe change donc le sens de sa courbure. Ainsi il y a un point d'inflexion entre ces deux points. Pour le trouver, cherchons la condition qui rend $\operatorname{tang}\varphi$ un maximum ou un minimum. Elle sera exprimée par l'équation

$$-12x + 6\sqrt{2} = 0,$$

qui donne

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

d'où il faut conclure que P et Q sont les deux points d'inflexion cherchés.

Cette hypothèse, introduite dans (4), donne

$$\text{tang}\,\varphi = \pm 1\,;$$

d'où il suit que les côtés MA et MB ou MG de l'angle invariable des parallélogrammes sont tangents à la courbe.

L'enveloppe des diagonales successives BA, B'A' .... etc., est, comme l'indique l'auteur, une parabole. Son équation, rapportée aux droites MB, MA, prises pour axes des x et des y, est

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x - y) + 1 = 0. \qquad (5)$$

Si on y fait successivement $x = 0$, $y = 0$, l'on trouve

$$(y - 1)^2 = 0, \qquad (x + 1)^2 = 0\,;$$

ce qui montre que les droites MP, MQ sont des tangentes ; et comme elles sont rectangulaires, il s'ensuit que la droite DD', parallèle à PQ, est la directrice de cette parabole ; qu'en conséquence le point I en est le foyer, et S le sommet. Les trois points P, S, Q sont donc des points communs aux deux courbes, où elles ont une tangente commune et où par conséquent elles se touchent elles-mêmes. Elles different dans tous les autres points.

Note. 1. Le folium de Descartes est une courbe du troisième degré de première espèce, ayant une asymptote rectiligne du genre hyperbolique ordinaire (*Introd in Analys.*, lib. II, cap. IX). On trouve de suite cette asymptote, en appliquant à l'équation (1) la méthode d'Euler exposée par M. le professeur Vannson (t. II, p 398) ; le marquis de L'Hospital construit la partie infinie de cette courbe avec son asymptote (*Analyse des inf. petits*, sect. I, p. 15, et sect. X, p. 166, deuxième édition, 1715).

Bernoulli (Jean) procède ainsi pour carrer la courbe (*Opera omnia*, t. III, p. 405). Dans l'équation (3) faisons $a-x=z^2$; on en tire

$$ydx=\frac{2z^2(z^2-a)\,dz}{\sqrt{4a-3z^2}}=\frac{2z^6(z^2-a)\,dz}{\sqrt{4az^6-3z^8}};$$

ce qui donne immédiatement

$$\int ydx=C-\frac{1}{6}z^3(4a-3z^2)^{\frac{1}{2}}=C-\frac{1}{6}(a-x)^{\frac{3}{2}}(a-3x)^{\frac{1}{2}};$$

l'intégrale est nulle pour $x=0$; donc $C=\frac{1}{6}a^2$; ainsi l'aire est exprimée par $\frac{1}{6}\left[a^2-(a-x)^{\frac{3}{2}}(4+3x)^{\frac{1}{2}}\right]$; faisant $x=a$, on trouve, pour l'aire du demi-folium, $\frac{1}{6}a^2$; faisant ensuite $x=-\frac{1}{3}a$; la demi-aire asymptotique est équivalente à $\frac{1}{6}a^2$; l'ordonnée maxima est $y=a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc le carré de cette ordonnée est équivalent à l'aire totale du folium ou bien à l'aire totale asymptotique.

On a encore ici l'exemple d'une aire fermée carrable; mais elle est dans l'exception indiquée par Newton. (*Voir* t. II, p. 351.)

Tous les foliums construits dans le même angle des axes sont semblables. Il reste à trouver dans quel cas une équation générale du troisième degré représente un folium. (*Voir* Mémoire de Nicole, Acad. des Sciences, 1729.)

2. La partie fermée de la courbe, ressemblant à une foliole, a donné son nom à la courbe. J'ignore pourquoi cette courbe est attribuée à Descartes : il n'en est point question dans sa géométrie. Elle est probablement dans les lettres; ce que je n'ose pourtant garantir, car je n'ai à ma disposition que l'édition de M. Cousin, qui n'a point de table de matières,

lacune déplorable. Il est vrai que dans le troisième livre de la Géométrie, Descartes construit une courbe du troisième degré, dont l'équation a quelque analogie avec celle du folium. Voici la génération de cette courbe : une parabole donnée se meut parallèlement à son axe ; d'un point donné sur cet axe, on dirige des rayons vers un point fixe situé dans le plan de la parabole ; le lieu d'intersection de ce rayon avec la parabole est une ligne du troisième degré, dont Descartes fait usage pour construire les racines de l'équation du sixième degré, en combinant cette courbe avec un cercle.

3. Les équations polaires peuvent servir à déterminer les asymptotes avec autant de certitude et, en certains cas, avec plus de facilité que les équations à coordonnées ordinaires. Dans les uns et les autres, il faut toujours *deux* conditions · la direction de l'asymptote, et sa distance à un point connu, et il est naturel de choisir le pôle. L'expression de cette distance est dans les ouvrages élémentaires, et peut se conclure, sans difficulté, de la formule de M. Rispal (t. II, p. 511). Mais une ligne peut avoir des points isolés multiples situés à l'infini ; la droite qui passe par ce point a alors une direction déterminée et devient une asymptote, quoique la courbe n'ait que des branches finies ; ce qui explique le fait, en apparence paradoxal, signalé par M. le professeur Vannson (t. II, p. 402). Nous reviendrons sur ce point d'analyse appliquée, et sur une propriété générale des surfaces et des courbes algébriques, peut-être non encore remarquée. Tm.