BRETON (DE CHAMP)

Note sur un mode particulier de description des lignes et des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 289-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__289_0>

NOTE

Sur un mode particulier de description des lignes et des surfaces du second ordre.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

La description de l'ellipse par le point d'une ligne droite de longueur constante, dont les extrémités demeurent sur deux axes fixes est connue de tout le monde, et l'on peut la regarder même comme définitivement acquise à la pratique dans la construction des épures où cette ligne doit figurer. Le mode analogue de description des autres sections coniques et même des surfaces du second ordre, si toutefois il est déjà consigné quelque part, est loin de présenter des avantages équivalents dans la pratique. Cependant on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici quelques détails sur cette question.

Déjà dans le scolie de la page 227, tome II de ce recueil, nous avons indiqué une loi suivant laquelle doit couper les côtés d'un angle fixe, la droite mobile dont un point, qui la partage en deux segments additifs ou soustractifs ayant entre eux un rapport constant, décrit l'hyperbole. Ce qui suit constitue, à vrai dire, le développement et la généralisation de cette remarque. Nous y avons considéré une relation très-simple entre les deux longueurs interceptées par la droite mobile sur les côtés de l'angle. Cette relation sera examinée dans un état de généralité que ne comportait point le scolie dont nous parlons. Il s'agit ici de l'équation algébrique du second degré entre trois variables qui sont les longueurs interceptées par un plan mobile sur les arêtes d'un angle trièdre. Nommons les ξ, η, ζ, prenons les arêtes pour axes des coordonnées x, y, z, les lettres des deux alphabets se correspondant respectivement, la relation donnée sera

$$F(\xi, \eta, \zeta)=0. \qquad (1)$$

Nous admettrons en outre que la trace du plan mené par le point décrivant et par chacun des axes, sur le plan des deux autres axes, détermine sur celle du plan mobile deux segments additifs ou soustractifs dont le rapport soit constant. On verra facilement, en faisant usage au besoin de la théorie des transversales ou de toute autre considération équivalente, qu'il existe nécessairement une relation entre les six segments ainsi obtenus, et que cette relation revient à dire que les distances des points de division à chacun des axes, mesurées dans le plan mobile, doivent être entre elles comme trois lignes données p, q, r, ces dernières lettres répondant aux coordonnées x, y, z, pour la symétrie de la notation.

Ceci étant bien compris, il n'y a aucune difficulté à former l'équation du lieu géométrique ou de la surface déterminée par le point du plan mobile. En effet celui-ci a pour équation

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=1. \qquad (2)$$

Celles des plans menés par le point décrivant et par chacun des axes sont

$$\frac{px}{qy}=\frac{\xi}{\eta}, \qquad \frac{qy}{rz}=\frac{\eta}{\zeta}, \qquad \frac{rz}{px}=\frac{\zeta}{\xi}. \qquad (3)$$

Et ainsi que l'on devait s'y attendre, chacune de ces équations est une conséquence des deux autres. En les combinant avec l'équation (2), il vient

$$\xi=\frac{p}{s}x, \quad \eta=\frac{q}{s}y, \quad \zeta=\frac{r}{s}z, \qquad (4)$$

expressions dans lesquelles on a fait, pour abréger

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}. \qquad (5)$$

Leur forme linéaire en fonction des coordonnées x, y, z du point décrivant fait voir que leur substitution dans la relation donnée (1) entre les longueurs ξ, η, ζ conduit à une équation de même degré. Ainsi est démontré que le point déterminé ci-dessus a pour lieu géométrique une surface de l'ordre de celle qui résulterait de la construction de l'équation (1) entre les variables ξ, η, ζ regardées comme les coordonnées d'un point. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2; \qquad (6)$$

il vient immédiatement

$$p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2=s^2\rho^2, \qquad (7)$$

équation d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, qui devient identique avec l'équation aux diamètres conjugués

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (8)$$

si l'on pose

$$a=\frac{s}{p}\rho,\ b=\frac{s}{q}\rho,\ c=\frac{s}{r}\rho. \qquad (9)$$

En choisissant convenablement les signes des divers carrés qui entrent dans l'équation (6) la transformée (7) représentera à volonté l'une quelconque des surfaces du second ordre ayant un centre. Celles qui, au contraire, en sont dépourvues, seront représentées par les transformées d'une équation différente de l'équation (6). Dans tous les cas, la surface aux coordonnées x, y, z, sera visiblement de même espèce que celle aux coordonnées primitives ξ, η, ζ. Les relations de l'une avec l'autre pourraient être déduites du théorème qu'on vient de démontrer, mais ce n'est pas ici le lieu de s'étendre sur de tels développements.

Nous terminerons cette note par l'explication d'un fait qui pourrait être regardé comme contraire à l'analogie que nous avons annoncé exister entre le mode de description des surfaces du second ordre, et celui de l'ellipse. On démontre aisément, dans le cas d'axes rectangulaires, et lorsque la somme $\xi^2+\eta^2$ est constante, que le point dont les coordonnées sont ξ, η, est sur la normale à l'ellipse menée par le point décrivant. La même chose a lieu, l'angle des axes étant quelconque, mais la droite mobile de longueur constante en ce sens seulement que ce sont les perpendiculaires aux axes menées aux distances ξ, η de l'origine, qui se rencontrent sur la normale. Or l'ellipsoïde ne possède point cette propriété, si ce n'est dans un cas très-particulier, où l'on a $p=q=r$.

Cette circonstance tient uniquement à ce que, dans les cas particuliers qui viennent d'être cités, l'éllipse coïncide, par son mode même de description, avec l'épicycloïde dite *rallongée* ou *raccourcie* que décrit le point du plan d'un cercle roulant intérieurement sur une circonférence d'un diamètre double, concentrique à l'ellipse. Un peu d'attention suffira pour se rendre compte de l'identité des deux courbes. Or, dès que la droite mobile cesse d'avoir une longueur constante, rien de semblable n'existe. Le fait purement accidentel, relatif à la normale, appartient donc réellement aux propriétés de la famille des épicycloïdes bien plus qu'aux sections coniques en général, et ne peut être allégué contre l'analogie visible de la description des surfaces par le point d'un plan mobile, avec celle des courbes par le point d'une droite.