L. ANNE

Question d'examen résolue

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 278-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__278_1>

QUESTION D'EXAMEN

RESOLUE

PAR M. L. ANNE,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique, répétiteur au collége Louis-le-Grand.

Trouver les éléments d'une niche cylindrique dont la surface et la capacité sont données.

1re PARTIE.

Soient x le rayon et y la hauteur du demi-cylindre formant cette niche, x est aussi le rayon du quart de sphère qui la termine.

Soient encore πa^2 la surface de cette niche et $\frac{4}{3}\pi b^3$ sa capacité, les équations du problème seront

$$\pi xy + \pi x^2 = \pi a^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi b^3,$$

$$\text{ou} \quad xy + x^2 = a^2 \quad \text{et} \quad 3x^2 y + 2x^3 = 8b^3.$$

Pour éliminer y, multiplions la première équation par $3x$ et retranchons-en la seconde, on aura

$$x^3 - 3a^2 x + 8b^3 = 0.$$

La condition de réalité ou d'imaginarité des racines est ici donnée par $4.27(16b^6 - a^6)$, c'est-à-dire

1° $a > b\sqrt[3]{4}$, 3 racines réelles et inégales,

2° $a = b\sqrt[3]{4}$, 2 racines réelles, dont une double,

3° $a < b\sqrt[3]{4}$, 1 seule racine réelle

1er *cas.* $a > b\sqrt[3]{4}$, les trois racines réelles. Dans $x^3 - 3a^2x + 8b^3 = 0$, le dernier terme $+8b^3$ est positif; le second terme manque; donc une racine est négative et une seule.

Le résultat de la substitution de $+a$ à la place de x est $-2(a^3 - 4b^3)$, quantité négative par l'hypothèse $a > b\sqrt[3]{4}$. Ainsi, des deux racines positives, l'une est plus petite que a, l'autre est plus grande.

La hauteur du cylindre est donnée par $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$, dans laquelle on substitue, à la place de x, ces racines de l'équation précédente. Donc, pour $x > a$, y est négatif; les éléments de la niche ne pouvant être que positifs, il en résulte que des trois racines trouvées, la première doit être rejetée, comme donnant un rayon négatif, la troisième doit l'être aussi, comme donnant une hauteur négative, et la seconde est la seule admissible. Ainsi, quand le problème est possible, il n'admet qu'une seule solution ; c'est-à-dire que deux niches ne peuvent avoir même surface et même capacité sans coïncider.

2ᵉ *cas.* $a = b\sqrt[3]{4}$, 2 racines réelles, dont une double. Le trinôme $x^3 - 3a^2x + 8b^3 = x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x+2a)(x-a)^2$. La première racine donne un rayon négatif $x = -2a$; les deux autres donnent un rayon positif $x = +a$; mais à ce rayon correspond une hauteur nulle $y = 0$, c'est-à-dire que la niche se reduit au quart de sphère qui la surmonte et en effet les données des problèmes peuvent s'écrire

$$\pi a^2 = \frac{1}{4}\,4\pi a^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3,$$

qui expriment bien la surface et la capacité du quart de la même sphère.

Tel est le cas du maximum de capacité pour une surface donnée, ou du minimum de surface pour une capacité donnée.

3ᵉ *cas.* $a < b\sqrt[3]{4}$, 1 seule racine réelle. Cette racine unique est négative, puisque le dernier terme de l'équation est positif. Ainsi, dans ce cas, le problème n'est pas possible ; ce qui s'accorde avec la solution du 2ᵉ cas.

2ᵉ PARTIE.

Si maintenant l'on suppose que le rayon x de la niche et sa hauteur y soient les coordonnées du point commun des deux courbes qui auraient pour équations les équations du problème, ces coordonnées donneront en unités linéaires les valeurs numériques de ces éléments de la niche, et nous allons établir l'identité de ces deux modes de résolution.

$$2x^3 + 3x^2y - 8b^3 = 0 \qquad (\textit{fig. } 34).$$

Cette courbe est du troisième degré et s'étend indéfiniment dans tous les sens ; seulement chaque valeur numérique négative de y donne pour x une valeur réelle positive et une seule (quand, dans une équation $f(x)=0$, il manque un terme entre deux termes de même signe, cette équation a au moins deux racines imaginaires) ; c'est-à-dire que toute parallèle à l'axe des x, et menée au-dessous de cet axe, rencontre toujours la courbe en un seul point situé à droite de l'axe des y.

La méthode générale des asymptotes, appliquée à cette équation, donne pour le coefficient d'inclinaison, $3c+2=0$, et 0 pour l'ordonnée à l'origine. Ainsi, $y=-\frac{2}{3}x$ est l'asymptote de cette courbe. Toutefois il faut se rappeler deux choses :

1° Si le lieu représenté par l'équation se compose d'une courbe et d'une droite, la méthode générale des asymptotes donne évidemment cette droite, puisque au delà de la courbe le lieu se réduit à cette droite. Ainsi $y=-\frac{2}{3}x$ ou ToT' n'est asymptote que parce que $3y+2x$ n'est pas diviseur de $2x^3+3x^2y-8b^3$.

2° Si l'équation de la courbe était complète, l'équation en c serait du degré de l'équation de la courbe, c'est-à-dire du troisième degré ; et comme elle est du premier degré, elle a deux racines infinies. Ainsi, si la méthode générale des asymptotes ne donne pas les asymptotes parallèles à l'axe des y, du moins elle avertit de leur existence. En changeant y en x et x en y, on trouve, en effet, $c_1^2(2c_1+3)=0$ ou $c_1^2=0$ avec $d_1=0$; c'est-à-dire que deux branches de la courbe sont asymptotes à la même partie de l'axe des y.

Car si l'on trouve une valeur double de c, $[c-\alpha]^2=0$, à laquelle corresponde une valeur double de d, $(d-\delta)^2=0$, deux branches de la courbe sont asymptotes à la même extrémité de la droite $y=\alpha x+\delta$.

Pour mieux suivre le cours de la courbe,

$$2x^3 + 3x^2y - 8b^3 = 0,$$

cherchons le coefficient d'inclinaison de sa tangente :

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{6x^2+6xy}{3x^2} = -\frac{2x^3+16b^3}{3x^3} = -\frac{2}{3} - \frac{16b^3}{3x^3},$$

$$y = \frac{2(4b^3 - x^3)}{3x^2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8b^3}{3x^2}.$$

Pour $x = b\sqrt[3]{4} = oB$, on a $y = 0$; B est un point de la courbe, si x décroît de $b\sqrt[3]{4}$ à 0 ; la fraction $\frac{8b^3}{3x^2}$ reste toujours plus grande que $\frac{2}{3}x$ et croît de plus en plus en convergeant vers l'infini, tandis que $\frac{2}{3}x$ décroît de plus en plus en convergeant vers zéro : donc y converge vers l'infini. Ainsi, la courbe part de B pour devenir asymptote à l'axe des y, du côté des x positifs.

Si x croît de $b\sqrt[3]{4}$ jusqu'à l'infini, la fraction $\frac{8b^3}{3x^2}$ décroît de plus en plus en convergeant vers zéro, de sorte que la valeur de y se réduit à $y = -\frac{2}{3}x$ pour $x = \infty$. Ainsi la courbe part de B pour devenir asymptote à la droite $y = -\frac{2}{3}x$ ou ToT' au-dessus d'elle.

Au reste, le coefficient d'inclinaison de la tangente pour toute valeur positive de x reste toujours négatif ; donc la courbe dans tout le cours de cette branche tourne sa concavité vers la région supérieure et à droite du plan.

Pour dessiner la courbe du côté des x négatifs, changeons x en $-x$, et portons les valeurs absolues de x_1 à gauche de l'origine et sur l'axe des x. L'équation devient

$$y = \quad x_1 + \frac{8b^3}{3x_1^2},$$

et le coefficient d'inclinaison de la tangente devient

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2(8b^3 - x_1^3)}{3x_1^3};$$

y restant toujours positif pour toute valeur de x_1, la courbe est tout entière située au-dessus de l'axe des x, au-dessus de la droite $y = \frac{2}{3}x_1 = -\frac{2}{3}x$, ou ToT', est asymptote à cette droite, et l'est aussi à l'axe des y,

pour $x_1 < 2b$; tang α est positif ;
pour $x_1 > 2b$; tang α est négatif ;
pour $x_1 = 2b = oC$ on a $y = 2b = CD$ et tang $\alpha = 0$;

donc à la rencontre D de la courbe et de la bissectrice GoG' de l'angle des coordonnées de signes contraires, la tangente est parallèle à l'axe des x, c'est le point le plus bas, cette branche tourne sa concavité vers la région supérieure du plan, et la courbe se trouve ainsi complétement tracée.

La deuxième équation $xy + x^2 = a^2$ ou

$$y = \frac{a^2 - x^2}{x} = -x + \frac{a^2}{x}$$

est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont l'une l'axe des y, l'autre la bissectrice $y = -x$ ou GoG' de l'angle des coordonnées de signes contraires ; et comme pour la même abscisse l'ordonnée de la courbe est moins longue que celle de la droite, cette hyperbole est tout entière contenue dans les angles G'oY' et YoG opposés au sommet, elle rencontre nécessairement la première courbe en un point M_1 situé dans l'angle G'oY', puisque cet angle contient son asymptote ToT' ; ainsi il y a toujours une valeur réelle et négative de x, $x = oN_1$, à laquelle correspond une valeur réelle et positive de y, $y = N_1M_1$.

L'hyperbole coupe l'axe des x du côté des x positifs au point $x = +a$; ce point est à droite de B si $a > b\sqrt[3]{4}$; est en B si $a = b\sqrt[3]{4}$; et est à gauche de B si $a < b\sqrt[3]{4}$: ce qui donne lieu à trois cas bien distincts.

1er Cas. $a > b\sqrt[3]{4}$. Soit $oA = a$, l'hyperbole part de A pour devenir asymptote à oG et rencontre nécessairement la première courbe en un point M_3 situé à droite de A, puisque l'angle XoG contient son asymptote oT.

Ainsi il y a une valeur réelle et positive de x, $x = oN_3$, à laquelle correspond une valeur réelle et négative de y,

$$y = N_3M_3.$$

L'hyperbole part de A pour devenir asymptote à l'axe des y, et même pour devenir plus asymptote à cet axe que la première courbe, ce qui établit l'existence d'une troisième rencontre M_2 des deux courbes, car alors l'hyperbole doit passer entre la première courbe et l'axe des y, pour ensuite rester continuellement entre ces deux lignes. Pour le démontrer, soient X l'abscisse de la première courbe, et x celle de l'hyperbole correspondant à la même coordonnée y, les équations du problème donnent

$$2X^3 + 3yX^2 = 8b^3,$$
$$2x^3 + 3yx^2 = 3a^2x - x^3,$$
$$2(X^3 - x^3) + 3y\,(X^2 - x^2) = 8b^3 - 3a^2x + x^3,$$
$$(X - x)\ [2X^2 + 2Xx + 2x^2 + 3yX + 3yx] = 8b^3 + x^3 - 3a^2x;$$

pour de très-petites valeurs de x, $3a^2x$ est très-petit et peut être plus petit que toute quantité donnée, par exemple $8b^3$; donc pour de très-petites valeurs de x, ou ce qui revient au même, pour de très-grandes valeurs de y, le second membre est positif, et comme les coordonnées le sont aussi, $(X - x)$ l'est aussi; donc toute parallèle à l'axe des x, du côté des x

positifs, et pour une valeur de y suffisamment grande, rencontre constamment l'hyperbole après avoir rencontré l'axe des y, et avant de rencontrer la première courbe.

Ainsi il y a une valeur réelle et positive de x, $x = oN_2$, à laquelle correspond une valeur réelle et positive de y,

$$y = N_2M_2\,;$$

et cette rencontre est la seule dont les deux coordonnées soient positives.

2e *cas.* $a = b\sqrt[3]{4}$. Alors le point A vient se confondre avec le point B, en ce point les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre.

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{2x^3+16b^3}{3x^3} = -\frac{24b^3}{12b^3} = -2,$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{y+2x}{x} = -2.$$

A partir de ce point l'hyperbole reste constamment entre la première courbe et l'axe des y ; car par cette hypothèse et pour $x = a - \delta$ le trinôme $8b^3 + x^3 - 3a^2x$ devient $\delta^2(3a - \delta)$, quantité essentiellement positive puisque $\delta < a$.

Ainsi pour cette hypothèse il n'y a que deux valeurs réelles de x, l'une négative à laquelle correspond une valeur de y réelle et positive, l'autre positive à laquelle correspond une valeur de y nulle.

3e *cas.* $a < b\sqrt[3]{4}$. Les deux courbes ne peuvent alors avoir aucun point commun du côté des x positifs, car l'hyperbole traverse l'axe des x entre l'origine et le point B pour ensuite rester constamment entre l'axe des y et la première courbe, puisque le trinôme $8b^3 + x^3 - 3a^2x$ pour $x = a - \delta$ devient $(8b^3 - 2a^3) + \delta^2(3a - \delta)$, quantité essentiellement positive comme formée de deux termes positifs.

Ainsi le problème n'est pas possible dans cette hypothèse.

TROISIÈME PARTIE.

Soit proposé de trouver le lieu des points d'où l'on peut mener une, deux ou trois tangentes à la courbe précédente $2x^3+3x^2y-8b^3=0$; l'équation de la tangente à cette courbe est $y-y'=-\frac{6x'^2+6x'y'}{3x'^2}(x-x')$ avec la relation

$$2x'^3+3x'^2y'-8b^3=0.$$

Si elle est menée du point $x=\alpha, y=\beta$, ces coordonnées doivent vérifier son équation ; on a

$$\beta-y'=-\frac{6x'^2+6x'y'}{3x'^2}(\alpha-x').$$

Si entre cette équation et la précédente on élimine ou y' ou x', par exemple y'; il en résulte une équation en x', α, β qui pour chaque système de valeurs simultanées de α et de β aura un certain nombre de racines réelles; si à ces valeurs réelles de x correspondent des valeurs réelles de y, on pourra du point (α, β) mener autant de tangentes, et les coordonnées de leurs points de contact seront ces valeurs de x et de y ainsi déterminées. L'équation de la courbe étant du premier degré en y, y est des deux inconnues celle qu'il est le plus simple d'éliminer, et en outre comme à chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y, les conclusions tirées de l'équation finale en x seront absolues. L'équation de la tangente devient, éliminant y,

$$\beta-\frac{8b^3-2x^3}{3x^2}=-\frac{16b^3+2x^3}{3x^3}(\alpha-x)$$

ou $$(3\beta+2\alpha)x^3-24b^3x+16b^3\alpha=0.$$

Pour tout point du plan situé au-dessous de l'asymptote, le coefficient de x^3 devient négatif ; par exemple $-K^2$, et alors l'équation devient

$$K^2x^3+24b^3x-16b^3\alpha=0,$$

équation qui a toujours deux racines imaginaires, puisque

b^3 est essentiellement positif, ainsi de tout point du plan situé au-dessous de l'asymptote on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

Pour tout point situé au-dessus de l'asymptote, la condition de réalité ou d'imaginarité des racines est donnée par

$$\frac{27.16.16.b^6\alpha^2}{(3\beta+2\alpha)^2} \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{4.24.24.24.b^9}{(3\beta+2\alpha)^3}$$

ou

$$2\alpha^3+3\alpha^2\beta \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 8b^3$$

1° Si $2\alpha^3+3\alpha^2\beta>8b^3$, le point (α,β) est intérieur à la courbe, ainsi de tout point intérieur à la courbe on ne peut mener qu'une tangente ; elle l'est à la branche qui ne contient pas le point.

2° Si $2\alpha^3+3\alpha^2\beta=8b^3$, le point (α, β) est un point de la courbe, ainsi cette courbe est elle-même le lieu d'où l'on peut lui mener deux tangentes ; et en effet on peut toujours en un point de la courbe lui mener une tangente, et de ce même point en mener une à l'autre branche.

3° Si $2\alpha^3+3\alpha\beta^2<8b^3$, le point est extérieur à la courbe, ainsi de tout point compris entre la courbe et son asymptote on peut toujours lui mener trois tangentes.

Toutes ces conséquences pouvaient être prévues d'après la forme de la courbe.

Remarque. Si l'équation finale, au lieu d'être ainsi du troisième degré, avait été d'un degré supérieur, on lui aurait appliqué les calculs du théorème de M. Sturm, et les fonctions V, V_1, V_2, V_3 .... ayant leurs coefficients fonctions de α et de β, auraient, pour chaque système de valeurs de α et β, donné le nombre des racines réelles : toutefois il faut bien se rappeler que cette méthode ne permet de supprimer ou d'introduire un facteur numérique ou algébrique qu'autant que ce facteur est essentiellement positif ; ainsi l'on ne peut supprimer ou introduire comme facteurs, dans tout le cours du calcul, que des puissances paires de α et de β.

Soit, par exemple, $y = x^{2m+1}$ (*fig.* 35), on trouve

$$
\begin{aligned}
V &= 2^m x^{2m+1} - (2m+1)\,\alpha x^{2m} + \beta,\\
V_1 &= x^2 - \alpha x,\\
V_2 &= \alpha^{2m} x - \beta,\\
V_3 &= \beta\,(\alpha^{2m+1} - \beta).
\end{aligned}
$$

1° Si α et β sont de même signe, il manque $(2m-1)$ termes entre deux termes de signes contraires : donc V a au moins $(2m-2)$ racines imaginaires. Ainsi, de tout point situé dans l'angle des coordonnées de même signe, on ne peut pas mener plus de trois tangentes à la courbe ; et si α et β sont de signes contraires, V a au moins $2m$ racines imaginaires ; ainsi, de tout point situé dans l'angle des coordonnées de signe contraire, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

2° Si α et β étant positifs, on a $\alpha^{2m+1} > \beta$,
ou si α et β étant négatifs, on a $+\alpha^{2m+1} > +\beta$,
la suite $-x$ donne 3 variations, la suite $+x$ en donne 0. Donc, de tout point situé entre la convexité de la courbe et l'axe des x, on peut toujours mener trois tangentes à la courbe.

3° Si $\alpha^{2m+1} = \beta$, la suite $-x$ donne 2 variations, et la suite $+x$ en donne 0. Donc cette courbe est encore le lieu d'où l'on peut lui mener deux tangentes.

4° Si α et β étant positifs, on a $\alpha^{2m+1} < \beta$,
ou si α et β étant négatifs, on a $+\alpha^{2m+1} < +\beta$,
la suite $-x$ donne 2 variations, la suite $+x$ en donne 1, donc il n'y a que 1 racine réelle. Ainsi, de tout point situé entre la concavité de la courbe et l'axe des x, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.