NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. AMIOT

Mémoire sur les polygones réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 264-278
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__264_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRE

SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PAR B. AMIOT,
Professeur de mathématiques au collége Saint Louis

—

1. Lorsqu'une circonférence est divisée en un nombre m d'arcs égaux, les cordes qui sous-tendent ces arcs forment le polygone régulier ordinaire de m côtés. Mais il existe plusieurs espèces de polygones dans l'ordre de m côtés (Voyez *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, par M. Poinsot, *Journal de l'École polytechnique*, 10^e cahier, page 16.)

Soit a un nombre entier inférieur et premier à m, toute corde, qui sous-tend un arc égal à une fraction de la circonférence marquée par $\frac{a}{m}$, peut être considérée comme le côté d'un polygone régulier de m côtés. Si $a = 1$, on aura le polygone régulier ordinaire, et dans tout autre cas, ce sera un polygone régulier *étoilé*. L'espèce de ce polygone est marquée par le nombre de fois que le périmètre fait le tour entier de la circonférence, ou, ce qui est la même chose, par le nombre d'unités contenues dans le numérateur de la fraction $\frac{a}{m}$.

2. n et n' étant deux nombres entiers quelconques premiers entre eux, supposons que l'on connaisse les valeurs de tous les côtés des différentes espèces de polygones réguliers de l'ordre n ainsi que de l'ordre n', et proposons-nous de déterminer les valeurs des côtés des différentes espèces de polygones réguliers inscrits au même cercle et contenus dans l'ordre marqué par le produit nn'.

Rappelons d'abord la proposition suivante démontrée par M. Poinsot. (*Voyez* Mémoire déjà cité.)

Dans l'ordre des polygones de m côtés, il y a autant d'espèces différentes qu'il y a de nombres premiers à m depuis l'unité jusqu'au nombre $\frac{m-1}{2}$.

Si l'on désigne ce nombre par M, et que l'on suppose $m = \alpha^p . \beta^q . \gamma^r \ldots\ldots$, α, β, γ représentant les facteurs simples ou premiers de m, on sait que l'on a :

$$M = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

3. Soient deux nombres entiers n et n' premiers entre eux ; soient en outre a un nombre entier premier à n et moindre que $\frac{n}{2}$, et a' un nombre entier premier à n' et moindre que $\frac{n'}{2}$, si l'on forme les deux fractions $\frac{a}{n} \pm \frac{a'}{n'} = \frac{A}{nn'}$, A représentant l'un ou l'autre des deux nombres $an' \pm a'n$, et que l'on remplace successivement a par tous les nombres

premiers à n, depuis l'unité jusqu'à $\frac{n-1}{2}$, et a' par tous les nombres premiers à n' depuis l'unité jusqu'à $\frac{n'-1}{2}$, il s'agit de prouver que l'on obtiendra pour A tous les nombres premiers à nn' compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, pourvu toutefois que l'on prenne $nn'-A$ au lieu de A, toutes les fois que ce dernier nombre excédera $\frac{nn'-1}{2}$.

D'abord il est manifeste que $A = an' \pm a'n$ est toujours un nombre premier avec n et n', et par conséquent avec le produit nn'. Car si l'on supposait qu'un certain facteur premier p divisât, par exemple, A et n, ce facteur diviserait an' et par suite a ou n', ce qui est également contraire à l'hypothèse. Il en résulte que $nn' - A$ est aussi un nombre premier à nn'.

Je dis, en second lieu, que tous les nombres obtenus pour A sont différents les uns des autres.

En effet, soient les valeurs de A

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 n' + a_1' n,\\
A_2 &= a_2 n' + a_1' n,\\
A_3 &= a_2 n' + a_2' n,\\
A_4 &= a_1 n' - a_1' n,\\
A_5 &= a_2 n' - a_1' n,\\
A_6 &= a_2 n' - a_2' n,\\
A_7 &= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Il est évident que A_1 diffère de A_2, de A_4, etc. Mais supposons que l'on eût $A_1 = A_3$, il en résulterait $(a_1 - a_2)n' = (a_2' - a_1')n$, et par conséquent n diviserait $a_1 - a_2$, ce qui est impossible, puisque chacun des nombres a_1 et a_2 est moindre que $\frac{n}{2}$. On verrait exactement de la même manière que deux autres quelconques de ces nombres sont nécessairement différents l'un de l'autre.

Mais il peut arriver que A_1, par exemple, soit plus grand que $\frac{nn'-1}{2}$; alors, au lieu de A_1 on prendra $nn'-A_1$, et je dis que ce nombre diffère pareillement de A_2, A_3........ En effet, supposons que l'on ait $nn'-A_1=A_2$, il en résultera $n'(n-a_1)=n(a_2+2a_1')$, et par suite n devra diviser a_1, ce qui est impossible, puisque l'on suppose $a_1<\frac{n}{2}$. Si l'on supposait $nn'-A_1=A_3$, il en résulterait $n'(n-a_1-a_2)=$ $=n(a_1'+a_2')$; et par suite n' diviserait $a_1'+a_2'$, ce qui ne se peut, puisque cette somme est moindre que n'.

Enfin, si l'on supposait $nn'-A_1=A_4$, il en résulterait $n=2a_1$, ce qui est encore inadmissible.

4. Cela posé, soient N le nombre des nombres premiers à n depuis l'unité jusqu'à $\frac{n-1}{2}$, et N' celui des nombres premiers à n' depuis 1 jusqu'à $\frac{n'-1}{2}$; si l'on donne successivement à a les N valeurs comprises de 1 à $\frac{n-1}{2}$, on aura, à cause du double signe, 2N valeurs de A correspondantes à une même valeur de a'. On en aura le même nombre pour chacune des valeurs de a', et par conséquent en tout on obtiendra 2NN' valeurs qui seront premières à nn', différentes les unes des autres et comprises depuis 1 jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, en ayant soin de prendre $nn'-A$, au lieu de A, chaque fois que A excédera $\frac{nn'-1}{2}$.

Or, si l'on désigne par α, β, γ les facteurs simples de n, par α', β', γ'.... ceux de n', de sorte que l'on ait

$$n=\alpha^p.\beta^q.\gamma^r.... \qquad \text{et} \qquad n'=\alpha'^{p'}.\beta'^{q'}.\gamma'^{r'}....,$$

il en résultera

$$nn' = \alpha^p \alpha'^{p'} \beta^q \beta'^{q'} \gamma^r \gamma'^{r'} \ldots ;$$

et si l'on désigne par N_1 le nombre des nombres premiers à nn' et compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, on aura

$$N_1 = \frac{nn'}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha'}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\beta'}\right)\ldots$$

D'ailleurs, on a

$$N = \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\ldots \text{ et } N' = \frac{n'}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha'}\right)\left(1-\frac{1}{\beta'}\right)\ldots$$

et par conséquent $N_1 = 2NN'$.

Donc enfin les différentes valeurs obtenues pour A, ou $nn' - A$, chaque fois que A excédera $\frac{nn'-1}{2}$, sont bien les différents nombres premiers à nn' compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$.

5. Soient maintenant $BC = x$ (*fig.* 1) le côté d'un polygone régulier de n côtés, et $AB = y$ celui d'un polygone régulier de n' côtés, inscrits l'un et l'autre à un cercle de rayon r, de sorte que les arcs BC et BA soient des fractions de la circonférence exprimées par $\frac{a}{n}$ et $\frac{a'}{n'}$; il s'agit de calculer la corde $AC = z$, qui sous-tend l'arc $AC = \frac{a}{n} - \frac{a'}{n'} = \frac{A}{nn'}$ de la circonférence.

Si l'on abaisse BI perpendiculaire sur le prolongement de AC, on a dans le triangle ABC,

$$(1) \qquad x^2 = y^2 + z^2 + 2z.AI ;$$

les deux triangles semblables KOB et ABI donnent

$$AI : KO :: AB : BO \ldots \quad \text{d'où} \quad AI = \frac{y\sqrt{4r^2 - x^2}}{2r},$$

et par suite, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad z^2 + \frac{y}{r}\sqrt{4r^2 - x^2}.\, z + y^2 - x^2 = 0.$$

On en déduit

$$(3) \qquad z = \frac{-y\sqrt{4r^2 - x^2} \pm x\sqrt{4r^2 - y^2}}{2r}.$$

Une de ces valeurs est positive et correspond à AC ; on a, en effet,

$$z' = \frac{x\sqrt{4r^2 - y^2} - y\sqrt{4r^2 - x^2}}{2r} = \frac{2r(x^2 - y^2)}{x\sqrt{4r^2 - y^2} + y\sqrt{4r^2 - x^2}},$$

quantité évidemment positive, puisque l'on suppose $x > y$.

L'autre valeur

$$z'' = -\frac{y\sqrt{4r^2 - x^2} + x\sqrt{4r^2 - y^2}}{2r}$$

est visiblement négative. Pour l'interpréter, je change z en $-z$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2z.\mathrm{A'I},$$

en prenant $\mathrm{A'I} = \mathrm{AI}$. Or, dans le triangle CBA′, on a

$$x^2 = y^2 + \overline{\mathrm{CA'}}^2 - 2\mathrm{CA'}.\mathrm{A'I};$$

et par conséquent CA′ est bien en valeur absolue la 2e racine de l'équation (1) ; c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{CA'} = -z'' = \frac{y\sqrt{4r^2 - x^2} + x\sqrt{4r^2 - y^2}}{2r}.$$

Pour interpréter géométriquement cette solution, je prends $\mathrm{BA_1} = \mathrm{BA}$, et le triangle $\mathrm{CBA_1}$, égal au triangle CBA′ donne $\mathrm{CA_1} = \mathrm{CA'}$. D'ailleurs, arc $\mathrm{CABA_1} = \mathrm{CAB} + \mathrm{AB} = \frac{a}{n} + \frac{a'}{n'}$ de la circonférence. Donc enfin :

Des deux racines de l'équation (1), *l'une représente la corde* *qui sous-tend l'arc* $AC = \frac{a}{n} - \frac{a'}{n'}$, *et l'autre la corde qui sous-tend* $CA_1 = \frac{a}{n} + \frac{a'}{n'}$ *de la circonférence.*

6. Supposons maintenant que l'on connaisse les N valeurs $x_1, x_2 \ldots\ldots x_N$ des côtés des différents polygones de l'ordre n, ainsi que les N′ valeurs $y_1, y_2 \ldots\ldots y_{N'}$ de ceux des polygones de l'ordre n', il suffira de remplacer dans la formule (3) x successivement par les valeurs $x_1, x_2 \ldots\ldots x_N$, et y par les valeurs $y_1, y_2 \ldots\ldots y_N$, pour obtenir les 2NN′ côtés des différents polygones de l'ordre nn'.

7. Ainsi, pour obtenir les côtés des 4 pentédécagones réguliers inscrits au même cercle, nous prendrons le côté du triangle équilatéral et les côtés des deux pentagones réguliers inscrits à ce cercle, qui sont, le rayon étant pris pour unité, $y_1 = \sqrt{3}$ et $x_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ces valeurs étant substituées dans la formule (3), nous avons les 4 valeurs suivantes :

$$z_1 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_2 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_3 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_4 = -\frac{1}{4}\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}).$$

8. On pourrait obtenir de même les valeurs des côtés d'un grand nombre de polygones, en partant des valeurs connues des polygones de 3, 4, 5 côtés ou de leurs multiples 6, 8, 15, etc., que l'on combinerait deux à deux, de manière à ne prendre jamais que des nombres premiers entre eux.

Mais les différents polygones que l'on obtient ainsi peuvent être également calculés par les formules ordinaires de la géométrie. Par exemple, en prenant les côtés des polygones de 4 et 5 côtés, de 8 et de 15, etc., on trouve ceux de 20, de 120, etc., et l'on peut obtenir ces mêmes polygones, en doublant, pour le premier, une fois le nombre des côtés du décagone, et, pour le deuxième, trois fois le nombre des côtés du pentédécagone.

9. Mais les polygones de 3, 4 et 5 côtés ne sont plus les seuls que l'on puisse inscrire géométriquement, c'est-à-dire avec la règle et le compas, et dont on sache par conséquent calculer les côtés sans se servir d'aucune équation de degré supérieur au deuxième. M. Gauss a démontré que l'on peut inscrire géométriquement dans un cercle tous les polygones dont le nombre des côtés est exprimé par 2^p+1, pourvu que ce nombre soit premier ; il a donné des méthodes générales pour ramener le calcul des côtés de ces différents polygones à la résolution d'une suite d'équations du deuxième degré. Ces méthodes sont fort belles et ne laissent rien à désirer quant à la théorie ; mais elles reposent sur les considérations les plus élevées de la théorie des nombres, et ne conduisent pas à des résultats très-simples, même pour le polygone de 17 côtés.

Nous avons donc pensé qu'un procédé particulier, par lequel on peut calculer et construire les valeurs des côtés des 8 polygones de 17 côtés sans sortir des notions les plus élémentaires de l'algèbre, ne sera pas dépourvu de tout intérêt : il offrira, du moins, un exercice utile de calcul et de construction géométrique.

10. Supposons un cercle O (*fig.* 32), de rayon égal à l'unité, divisé en 17 parties égales, nous aurons dans le triangle AOB,

$$\overline{AB}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AC}^2},$$

en observant que $BB' = AC$.

Nous aurons pareillement dans le triangle AOC,

$$\overline{AC}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AD}^2},$$

parce que $AD = CC'$. Puis, dans le triangle AOD,

$$\overline{AD}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AE}^2};$$

et enfin dans le triangle AOE,

$$\overline{AE}^2 - 2 + \sqrt{A - \overline{AB}^2},$$

parce que $AB = EE'$.

Si, pour simplifier, nous posons,

$$a = \sqrt{4 - \overline{AB}^2} \quad \text{d'où résulte} \quad \overline{AB}^2 = 4 - a^2,$$

$$b = \sqrt{4 - \overline{AC}^2} \qquad \overline{AC}^2 = 4 - b^2,$$

$$c = \sqrt{4 - \overline{AD}^2} \qquad \overline{AD}^2 = 4 - c^2,$$

$$d = \sqrt{4 - \overline{AE}^2} \qquad \overline{AE}^2 = 4 - d^2,$$

nous aurons les quatre équations,

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b + 2, \\ b^2 = c + 2, \\ c^2 = d + 2, \\ d^2 = -a + 2. \end{array} \right.$$

Si nous considérons pareillement les quatre triangles AOH, AOK, AOL et AOM, et que nous posions

$$a' = \sqrt{4 - AK^2}, \qquad b' = \sqrt{4 - AL^2},$$

$$c' = \sqrt{4 - AM^2}, \qquad d' = \sqrt{4 - AH^2},$$

nous aurons les quatre équations

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a'^2 = -b' + 2, \\ b'^2 = -c' + 2, \\ c'^2 = -d' + 2, \\ d'^2 = +a' + 2; \end{array} \right.$$

système qui ne diffère du précédent qu'en ce que a, b, c et d y sont remplacés par $-a'$, $-b'$, $-c'$ et $-d'$.

11. Si l'on éliminait directement b, c et d entre les équations (A), on aurait une équation du 16^e degré en a, dont les racines seraient non-seulement toutes les valeurs cherchées, mais encore celles qui correspondent aux polygones de 5 et de 3 côtés. Car, en faisant $b=d$ et $c=-a$, les deux dernières équations du système rentrent dans les deux premières, et l'on retombe sur le pentagone régulier. De même, en supposant $a=b$, $b=c$, $c=d$ et $d=-a$, on a la seule équation $a^2=a+2$ qui convient au triangle équilatéral.

Pour supprimer ces solutions étrangères à la question, je soustrais d'abord la troisième équation de la première, et la quatrième de la deuxième, puis je multiplie les deux équations ainsi obtenues et je supprime les facteurs $b-d$ et $c+a$, ce qui me donne

$$(\alpha)\quad (a-c)(b+d)=1 \text{ ou bien } ab+ad-bc-cd=1.$$

Je soustrais ensuite la deuxième équation de la première, la troisième de la deuxième, la quatrième de la troisième, et la première de la quatrième ; je multiplie membre à membre, et je supprime les facteurs communs $b-c$, $c-d$, $d+a$ et $-(a+b)$, ce qui fournit

$$(\beta)\qquad (a-b)(c+d)(b+c)(a-d)=1$$

ou bien

$$(ac-bd+ad-bc)(ac-bd+ab-cd)=1.$$

Si nous posons

$$x=c-a \quad \text{et} \quad z=-ac$$
$$y=b+d \qquad\quad t=bd,$$

les équations (α) et (β) deviendront

$$(\alpha')\qquad xy=1,$$
$$(\beta')\qquad (t+z+bc-ad)(t+z+cd-ab)=1,$$

et la question sera ramenée à calculer x, y, z et t, ou simplement $\quad X = x + y$, $Y = t + z$ et $Z = tz$,
puisque déjà nous connaissons xy.

Or, en vertu de (α), l'équation ($\mathcal{E}'$) devient

$$Y^2 + 3Y + b^2d + bd^2 - ca^2 - ac^2 = 1\;;$$

et comme on déduit des équations (A)

$$b^2d + bd^2 + ca^2 - ac^2 = -1 + 2(b + d + c - a) = -1 + 2X,$$

on a enfin, entre Y et X, l'équation

$$\text{(Y)} \qquad Y^2 + 3Y + 2X = 2.$$

Si l'on élève au carré l'équation $X = b + c + d - a$, en observant d'ailleurs que $b^2 + d^2 + c^2 + a^2 = x + y + 8 = X + 8$, on obtient sans peine la deuxième équation

$$\text{(X)} \qquad X^2 - 2Y - X = 6.$$

Pour avoir Z, j'élève pareillement au carré les deux membres de l'équation $Y = bd - ac$, et j'ai

$$Y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = a^2c^2 + b^2d^2 + 2Z.$$

Or

$$a^2c^2 + b^2d^2 = bd - ac + 2(b + d + c - a) + 8,$$

et par conséquent, on trouve, après quelques réductions,

$$\text{(Z)} \qquad Z = -2(X + Y) - 3.$$

12. Pour obtenir les valeurs de X et de Y, je remarque que les équations (X) et (Y) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$Y(Y + 3) = 2(1 - X) \quad \text{et} \quad X(X - 1) = 2(Y + 3).$$

Si on les multiplie membre à membre, on a

$$(XY + 4)(X - 1)(Y + 3) = 0.$$

Et l'on voit qu'à la valeur $X - 1$ correspond $Y = -3$, système qui ne peut convenir à la question, attendu que la valeur correspondante de Z serait $+4 - 3 = 1$, et que Z doit être négatif.

Reste donc l'équation $XY = -4$, laquelle combinée avec (X) donne, par l'élimination de Y,

$$X^3 - X^2 - 6X + 8 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré, mais on voit sans peine qu'elle admet la racine 2; par conséquent elle se décompose dans les deux facteurs

$$(X-2)(X^2+X-4)=0.$$

A la valeur $X=2$ correspond $Y=-2$, et ce système doit encore être rejeté. En effet, la valeur correspondante de Z serait -3, et il est facile de reconnaître que l'on doit avoir, en valeur absolue, $Z<2$. Car la corde d, qui sous-tend l'arc $A'E=\frac{1}{34}$ de la circonférence, est moindre que la moitié du côté du décagone ; la corde c, qui sous-tend l'arc $A'D=\frac{4}{17}+\frac{1}{34}$ de $C=\frac{9}{34}C$ est plus petite que le côté du décagone étoilé qui sous-tend $\frac{3}{10}C$, et par conséquent on a

$$abcd < 2.2.\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}<2.$$

Restent donc les deux valeurs de X fournies par l'équation $X^2+X-4=0$. Or, si nous substituons dans l'équation (Y) la valeur $X=-\frac{4}{Y}$, et que nous supprimions la racine étrangère $Y=-2$, nous obtenons encore l'équation $Y^2+Y-4=0$. Par conséquent, des deux racines de cette équation, l'une est la valeur de X, et l'autre celle de Y; et l'on a, pour la valeur correspondante de Z, $Z=-1$.

13. D'après cela, pour résoudre la question qui nous occupe, il suffira de résoudre ou de construire le systéme d'équations suivantes :

(1) $$X^2 + X - 4 = 0,$$
(2) $$x^2 - Xx - 1 = 0,$$
(3) $$z^2 - Yz - 1 = 0,$$
(4) $$a^2 - ax + z = 0,$$
(5) $$b^2 - by + t = 0.$$

La racine positive de l'équation (1) sera la valeur de X, et la négative celle de Y ; les deux racines de l'équation (2) seront positives et représenteront, la plus petite, la valeur de x, et la plus grande, celle de y ; l'équation (3) donnera deux valeurs de signes contraires, la positive sera z et la négative t ; enfin, les deux racines de (4) seront $-a$ et c, et celles de (5), b et d.

En effectuant les calculs, on trouvera aisément

$$X = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1), \qquad Y = -\frac{1}{2}(\sqrt{17} + 1),$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right),$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right),$$

$$z - = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} + 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right),$$

$$t = -\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right).$$

$$-a = \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} -$$

$$- \sqrt{68 + 14\sqrt{17} - 4\sqrt{170 - 26\sqrt{17} + 16\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$c = \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+ \sqrt{68 + 14\sqrt{17} - 4\sqrt{170 - 26\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 14\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$b=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$

$$+\sqrt{68+14\sqrt{17}+4\sqrt{170-26\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$d=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-$$

$$-\sqrt{68+14\sqrt{17}+4\sqrt{170-26\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Big).$$

14. Si au lieu du système d'équations (A), on avait considéré le système (B), on aurait effectué les mêmes calculs en posant $x=a'-c'$, $y=-(b'+d')$, $z=-a'c'$ et $t=b'd'$, d'où serait résulté que la racine négative de l'équation (1) aurait représenté X et la racine positive Y. Il s'ensuit que les valeurs de a', $-b'$, $-c'$ et d' se déduiront de celles de $-a$, b, c et d, en changeant $\sqrt{17}$ en $-\sqrt{17}$ dans les quatre dernières formules.

15. Une fois les valeurs de a, b....a'.... ainsi obtenues, on aura aisément celles des côtés AB, AC ... des huit polygones de 17 côtés; et en les combinant avec les valeurs connues des côtés des polygones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15 .... côtés, on obtiendra tous les polygones de 51, 68, 85, 102, 136, 170, 255 .... côtés.

16. Au lieu de résoudre les équations du n° 13, on pourrait les construire et arriver assez simplement aux valeurs des lignes cherchées. Pour cela, l'équation (1) se met sous la forme $2^2=X(1+X)$, et donne visiblement (Fig. 33) $X=OX$ et $Y=OY$, si l'on suppose $OM=2$ et $MI=\frac{1}{2}=\frac{OA}{2}$. De même, les équations (2) et (3) se mettront sous la forme $1^2=x(x-X)$ et $1^2=z(z-Y)$, et l'on a, en posant $OL=\frac{1}{2}X$ et $OL'=\frac{1}{2}Y$ (*fig.* 33) : $x=A'x, y=A'y, z=A'z$, et $t=A't$.

Pour rétablir l'homogénéité dans les équations (4) et (5), je pose $z \times 1 = k^2$, $t \times 1 = h^2$, et je construis $k = A'k$ et $h = A'h$; ce qui me donne $k^2 = a(a - x)$ et $h^2 = b(y - b)$. Par conséquent, en prenant $A'k_1 = k$, et $k_1 v = \frac{x}{2}$, on aura $A'a = a$, et $A'c = c$; de même, en prenant $A'y_1 = y$ et $A'h_1 = h$, on aura $A'd = d$ et $Ab = y_1 d = b$; de sorte qu'en portant les cordes $A'd$, $A'c$, $A'b$ et $A'a$ sur la circonférence O, on aura les arcs $AB = \frac{1}{17}$, $AC = \frac{2}{17}$, $AD = \frac{4}{17}$ et $AE = \frac{8}{17}$ de la circonférence.

Si l'on change ensuite X en Y et réciproquement, puis que l'on répète d'ailleurs la même construction, on aura les quatre cordes $A'c' = c'$, $A'a' = a'$, $A'b' = b'$ et $A'd' = d'$, telles qu'en les portant de A en M (*fig.* 32), en K, en L et en H, on obtiendra les arcs $AH = \frac{3}{17}$, $AL = \frac{5}{17}$, $AK = \frac{6}{17}$ et $AM = \frac{7}{17}$ de la circonférence.