NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON ANNE

Démonstration de trois théorèmes de géométrie, y compris le 64e

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 25-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__25_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

DÉMONSTRATION

de trois théorèmes de géométrie, y compris le 64e
(p. 416, t. II).

PAR M. LÉON ANNE,
Ancien élève de l'École polytechnique, et répétiteur au Collége Louis-le-Grand

---

1er Théorème.

Si deux polygones (*fig.* 7) ABCD.., A'B'C'D', sont sembla bles, intérieurs l'un à l'autre, et ont leurs côtés homologues parallèles, tout polygone PQRT à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre, a une surface moyenne proportionnelle entre celles des deux polygones semblables.

En effet, les droites AA′, BB′, CC′, ... qui joignent les sommets homologues des deux polygones semblables semblablement placés, viennent toutes concourir au même point o, centre de similitude des deux polygones (théorème connu).

Je joins ce point o avec tous les sommets du polygone moyen par les droites oP, oQ, oR, oT..... qui coupent les côtés correspondants du polygone intérieur aux points p, q, r, t..... Cette construction décompose les trois polygones en triangles tels que chaque triangle du polygone moyen est moyen proportionnel entre les deux qui lui correspondent dans les deux polygones semblables.

Par exemple, oQB′ donne, à cause du parallelisme de AB et A′B′,

$$oQB : oQB' :: oB : oB' :: oQ : oq :: oQB' : oqB'.$$

En outre, le point o étant le centre de similitude des polygones ABCD..... A′B′C′D′....., les surfaces de ces triangles qui se correspondent et qui sont homologues, sont entre elles comme celles S,S′ de ces polygones; d'où

$$oQB = \frac{oqB' \times S}{S'} = \frac{oqB'}{S'^2} \times S.S'.$$

Substituant

$$oQB' = \sqrt{oQB \times oqB'} = \sqrt{\frac{\overline{oqB'}^2}{S'^2} \times S.S'} = \frac{oqB'}{S'}\sqrt{S.S'}.$$

Chaque triangle du polygone PQRT..... donnant cette même relation, il vient

$$oPA' + oA'Q + oQB + \ldots = \frac{opA' + oA'q + oqB' + \ldots}{S'}\sqrt{S.S'};$$

mais le numérateur n'est autre chose que S′ lui-même;

donc

$$\text{poly. PQRT} \ldots = \sqrt{\text{poly. ABCD} \ldots \times \text{poly. A'B'C'D'} \ldots}$$

Remarques. 1° Ce théorème a cela de remarquable, qu'il est encore vrai quand même les trois points P, A', Q ou QB'R ne seraient pas en ligne droite, c'est-à-dire quand même le polygone PQRT ne serait plus convexe, pourvu toutefois que ses sommets soient alternativement un sommet du polygone intérieur et sur un côté du polygone extérieur. Cela tient au parallélisme des côtés.

2° Le théorème serait encore vrai, si les polygones étaient remplacés par des secteurs polygonaux assujettis aux mêmes conditions.

3° La démonstration est évidemment la même pour des triangles assujettis aux mêmes conditions, c'est-à-dire pour le théorème (64) énoncé, p. 416, t. II.

Ce théorème sur les triangles est cité dans Gergone, t. II, p. 93, sans aucune démonstration; M. Lilatte, professeur à Angers, y est parvenu par des considérations trigonométriques : on peut en donner cette autre démonstration : Menant (*fig.* 8) C'C'' parallèle à AB, ainsi que les autres lignes tracées sur la figure, le parallélisme donne

$$A'DC' = A'CC', \quad B'FC' = B'CC', \quad A'EB' = A'GB'.$$

Donc $\qquad DEF = A'GC \quad$ et $\quad A'C'B' = A'C''B'.$

Les triangles A'C''B' et A'GC sont entre eux comme C''B' et CG, donc comme les hauteurs des triangles A'C'B', ACB; ou enfin comme leurs côtés homologues A'B' et AB. En outre

$$A'GC : KGC :: CA' : CK :: A'B' : KG$$
$$KGC : ABC :: KG : AB.$$

Multipliant terme à terme, $A'GC : ABC :: A'B' : AB$

Donc $\qquad A'C''B' : A'GC :: A'GC : ABC,$

ou $\qquad A'B'C' : DEF :: DEF : ABC.$

ce qu'il fallait démontrer.

2ᵉ Théorème.

Si aux sommets d'un quadrilatère inscrit dans un cercle on mène des tangentes, les diagonales des deux quadrilatères ainsi construits concourent toutes au même point.

Pour le démontrer, je remarque que si deux triangles ont un angle égal et un angle supplément, les côtés opposés aux angles égaux sont entre eux comme les côtés opposés aux angles supplémentaires (ce qui se démontre en plaçant les deux triangles l'un contre l'autre, de sorte que l'angle intérieur de l'un devienne l'angle extérieur de l'autre.)

Cela admis, soit o la rencontre de BD et de HF (*fig.* 9), les triangles BoF, DoH ont l'angle o commun et l'angle B supplément de D, puisque BF, DH sont tangentes aux extrémités d'une même corde BD. Donc, BF : DH :: Fo : oH.

Soit o' la rencontre de AC et FH, les triangles Fo'C, Ao'H sont dans les mêmes conditions ; FC : HA :: Fo' : o'H, à cause du rapport commun ; Fo : oH :: Fo' : o'H ou Fo : FH :: Fo' : FH. Donc Fo = Fo' ; c'est-à-dire que les deux diagonales coupent FH au même point. Donc aussi EG.

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On peut considérer le cercle comme base d'un cylindre ou comme base d'un cône, et cette figure comme une projection cylindrique ou comme une projection conique. De là ce théorème : Si aux sommets d'un quadrilatère inscrit dans une courbe du second degré, on mène des tangentes à cette courbe, les diagonales des deux quadrilatères ainsi formés concourent toutes au même point.

3ᵉ Théorème.

Si de deux points (*fig.* 10) D, D', du côté BC d'un triangle ABC quelconque, on mène des parallèles DE, DF, D'E', D'F' aux deux autres côtés du triangle, et si l'on joint un point M quelconque du côté BC aevc les extrémités de ces parallèles, les deux triangles EME', FMF' qui en résultent forment une somme constante et égale au triangle DAD' formé en joignant les deux points DD' avec le sommet opposé.

Pour le démontrer, je remarque que si d'un point M quelconque de la diagonale DD' d'un parallélogramme KDGD', on mène des parallèles à ses côtés, il en résulte quatre parallélogrammes, les deux KRMT, PMSG, qui ne contiennent pas la diagonale, sont équivalents.

En effet, ces parallélogrammes sont entre eux comme les triangles RMT, PMS, c.-à-d. comme $MR \times MT : MP \times MS$. Or le parallélisme donne

$$MR : KD' :: DR : DK, \quad MT : DK :: D'T : D'K.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, et supprimant les facteurs communs,

$$MR \times MT = DR \times D'T = MP \times MS.$$

Donc les parallélogrammes RMTK, PMSG sont équivalents. Ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé,

$$EME' = \frac{1}{2}.EPTE'; \quad FMF' = \frac{1}{2}FRSF'.$$

Faisant la somme et remplaçant RMTK par PMSG, il vient

$$EME' + FMF' = \frac{1}{2}EGD'E' + \frac{1}{2}FKD'F',$$

somme qui est constante.

En second lieu,

$$DAD' = DAK + DKD' + KAD'$$

ou
$$DAD' = \frac{1}{2}EDKE' + \frac{1}{2}DGD'K + \frac{1}{2}KFF'D'.$$

Donc, $$EME' + FMF' = DAD';$$
ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait absolument la même si le point M était sur tout autre point de BC non intérieur à DD'. Enfin, si le point M était sur le prolongement du côté BC, ce serait la différence des surfaces des deux triangles MFF', MEE', qui serait constante et égale à celle du triangle DAD'.