ÉMILE BARY

Statique appliquée au magnétisme (École normale). Note sur la manière de corriger le défaut de centrage des boussoles d'inclinaison

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 257-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__257_0>

STATIQUE APPLIQUÉE AU MAGNÉTISME
(*École normale*).

Note sur la manière de corriger le défaut de centrage des boussoles d'inclinaison.

PAR M. ÉMILE BARY,
Professeur au collége de Charlemagne.

—

On sait qu'il est presque impossible de construire une aiguille d'inclinaison de manière que l'axe autour duquel elle est mobile passe exactement par le centre de gravité de cette aiguille. Pour constater ce *défaut de centrage*, on fait coïncider le plan de rotation avec le méridien magnétique, et l'on observe l'angle a que l'aiguille en équilibre fait avec l'horizontale menée dans ce plan ; puis on change le sens de l'aimantation de l'aiguille, et l'on reconnaît que dans le même méridien elle fait avec l'horizontale un angle a', qui, dans les appareils les plus précis, diffère peu du premier angle a, mais qui ne lui est jamais égal. On a coutume de prendre pour mesure de l'inclinaison la moyenne $\frac{a+a'}{2}$. Je me propose ici d'apprécier cette correction, et en outre de la modifier dans les cas où elle serait insuffisante. Pour cela, je n'aurai qu'à résoudre et à discuter un problème fort simple de statique, dont voici l'énoncé.

Une aiguille aimantée, que l'on suppose réduite à son axe, étant suspendue par un de ses points F voisin de son centre de gravité G, a fait avec l'horizontale un angle a dans le méridien magnétique. La même aiguille suspendue par le même point F, mais aimantée inégalement et en sens contraire, a fait avec l'horizontale un angle a' dans ce méridien. On demande l'inclinaison vraie de l'aiguille, c'est-à-dire l'angle i qu'elle ferait avec l'horizontale dans le même méridien, si elle était suspendue par son centre de gravité. On admet que dans les deux cas la distribution du magnétisme libre soit la même suivant la longueur de l'aiguille. De plus, lorsqu'on la suspendait horizontalement (*) sous l'influence seule du globe, et qu'on l'écartait de sa direction d'équilibre, elle exécutait en une minute n oscillations dans le premier cas, et n' dans le second.

Solution. Plaçons l'observateur à Paris ou en un point quelconque de notre hémisphère magnétique. Soit $a > a'$, ce qui revient à supposer que dans le premier état magnétique de l'aiguille son centre G soit situé sur sa partie *australe*, c'est-à-dire sur celle qui s'abaisse vers le nord. Alors la pesanteur doit augmenter l'inclinaison. Désignons par p le poids de l'aiguille, par d la distance inconnue du centre G au point fixe F, par l la distance FA du point fixe au pôle austral A de l'aiguille, et par l' la distance FB du même point fixe au pôle boréal B (*fig.* 29). Chacune des forces du couple terrestre appliqué à l'aiguille pourra être représentée, d'après la théorie du pendule, par cn^2, c étant un poids constant dans le même lieu pour une aiguille dans laquelle la distribution du magnétisme libre ne change pas. Égalons le moment du poids à la somme des moments des forces magnétiques du globe, forces qui font avec l'horizontale FH l'angle i demandé ; il viendra

$$pd\cos a = cn^2 l \sin(a - i) + cn^2 l' \sin(a - i).$$

Dans le second état magnétique de l'aiguille, le centre G

(*) Cette suspension s'opère à l'aide d'un étrier de papier supporté par un long fil de soie non tordu.

sera situé sur sa partie *boréale*, c'est-à-dire sur celle qui s'élève vers le sud, et la pesanteur diminuera l'inclinaison. Chacune des forces terrestres aura pour valeur cn'^2, et l'équation des moments sera (*)

$$pd\cos a' = cn'^2 l \sin(i - a') + cn'^2 l' \sin(i - a').$$

En divisant ces deux équations membre à membre, nous éliminerons p, d, c, $l + l'$, et nous aurons

$$\frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{n^2 \sin(a - i)}{n'^2 \sin(i - a')}.$$

De là on déduit sans peine

$$\operatorname{tang} i = \frac{n^2 \operatorname{tang} a + n'^2 \operatorname{tang} a'}{n^2 + n'^2}.$$

Discussion. Cette formule montre que l'inclinaison réelle i dépend non-seulement des inclinaisons apparentes a et a', mais encore des intensités relatives du magnétisme développé dans l'aiguille par les deux aimantations inverses. Il sera facile de rendre n' aussi peu différent de n que l'on voudra, en prenant une aiguille qui ne soit pas trop fortement trempée, en l'aimantant chaque fois avec des faisceaux d'aimants très-énergiques, et en multipliant les frictions de manière à *saturer* l'aiguille dans les deux cas. Il faudra aussi que la méthode d'aimantation soit exactement la même dans le second cas que dans le premier, afin que l'intervalle AB ou $l + l'$ des deux pôles demeure constant. Nous supposerons donc,

(*) Dans la pratique l'angle a ou l'angle a' n'est pas le résultat d'une seule observation ; a ou a' est la moyenne des angles que l'on obtient en présentant successivement la même face de l'aiguille à l'est et à l'ouest, et en lisant chaque fois sur le limbe gradué aux deux extrémités de l'aiguille. On corrige ainsi 1° le défaut possible de coïncidence de l'axe magnétique avec l'axe de figure, 2° la faible courbure que peut avoir ce dernier axe. Pour savoir jusqu'où vont ordinairement les écarts offerts par ces diverses déterminations du même angle a ou a', voyez le *Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme*, par M. Becquerel, t. 7, p. 27. Vous y trouverez des exemples numériques très-bien choisis, que l'auteur a empruntés aux observations du capitaine Duperrey.

dans ce qui va suivre, $n = n'$, et la formule deviendra

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} a'}{2}.$$

Ainsi *la tangente de la véritable inclinaison est égale à la demi-somme des tangentes des deux inclinaisons observées.*

Il est aisé de construire l'angle i géométriquement, connaissant a et a' : on tracera une circonférence de cercle avec un rayon égal à l'unité. Soit F (*fig.* 30) le centre ; soit FH un rayon horizontal ; soient $\mathrm{HT} = \operatorname{tang} a$ et $\mathrm{HT'} = \operatorname{tang} a'$. On prendra le milieu O de la différence TT′ des deux tangentes, on joindra ce point O au centre F, et l'angle HFO sera évidemment l'angle demandé i.

De cette construction résulte l'inégalité

$$i > \frac{a + a'}{2}.$$

Car si l'on menait la bissectrice FO′ de l'angle TFT′ ou $a - a'$, elle diviserait la base TT′ en deux parties TO′ et O′T′, qui seraient entre elles comme les côtés adjacents FT et FT′ ou comme $\sec a$ est à $\sec a'$. O′T′ serait donc plus petit que OT′ ou $\frac{\mathrm{TT'}}{2}$, et partant HFO′ ou $\frac{a + a'}{2}$ serait plus petit que HFO qui est notre angle i.

On déduirait encore cette inégalité de l'équation non résolue

$$\frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{\sin (a - i)}{\sin (i - a')}.$$

En effet, de $a > a'$ on conclut $\cos a < \cos a'$; donc on doit avoir $\sin (a - i) < \sin (i - a')$, et par suite, $a - i < i - a'$, ou $i > \frac{a + a'}{2}$, C. Q. F. T. On voit donc que l'approximation usitée qui consiste à poser $i = \frac{a + a'}{2}$ donne une inclinaison un peu trop faible.

L'expression que j'ai obtenue pour tang i n'étant pas immédiatement calculable par logarithmes, on pourra la remplacer par celle-ci :

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(a+a')}{2\cos a \cos a'}.$$

Mais il vaut mieux prendre pour inconnue l'excès de i sur $\frac{a+a'}{2}$. Des transformations faciles conduiront à la formule

$$\operatorname{tang}\left(i - \frac{a+a'}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{a+a'}{2}\operatorname{tang}^2\frac{a-a'}{2}.$$

Cette expression est toujours positive, quel que soit le signe de $a - a'$; ce que l'on pouvait prévoir. Elle servira à calculer i très-simplement en fonction de la demi-somme et de la demi-différence des angles observés (*). Cette expression a aussi l'avantage de donner la mesure de l'erreur que l'on commet ordinairement dans la pratique. Pour la même différence $a - a'$, l'erreur croît à mesure que l'inclinaison augmente. On conçoit que cette erreur soit négligeable pour des inclinaisons faibles ou même moyennes. Mais pour les grandes inclinaisons, elle devient trop forte pour qu'on la laisse subsister. Appuyons cette remarque de quelques exemples numériques.

(*) Si l'on supposait n' différent de n, on parviendrait à la formule plus générale

$$\operatorname{tang}(i-\theta) = \frac{\left[(n^2+n'^2)\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' + (n^2-n'^2)\right]\operatorname{tang}\theta'}{n^2+n'^2+(n^2-n'^2)\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta'}$$

dans laquelle j'ai remplacé pour abréger $\frac{a+a'}{2}$ par θ et $\frac{a-a'}{2}$ par θ'.

Si l'on faisait $n' = n$ dans cette expression, on retomberait sur celle qui est indiquée dans le texte. Il serait aisé aussi de trouver le rapport qui devrait exister entre n et n' pour que l'on eût rigoureusement

$$\operatorname{tang}(i-\theta) = 0, \text{ ou en d'autres termes } i = \frac{a+a'}{2}$$

Mais le cas où cette condition serait remplie est beaucoup trop particulier pour se présenter dans les observations.

Une boussole d'inclinaison peut être regardée comme très-bonne, si, pour des inclinaisons voisines de 45°, la différence $a - a'$ n'est que de 1°. Posons donc

$$\frac{a+a'}{2} = 45° \qquad \text{et} \qquad \frac{a-a'}{2} = 30' ;$$

nous trouverons (*) $i - \dfrac{a+a'}{2} = 15'',72.$

L'erreur ne tombant que sur les secondes a peu d'importance; car ici, la nature des observations ne permettant pas d'atteindre une précision illimitée, il est peut-être inutile de dépasser les minutes dans l'évaluation des angles, et un surcroît d'exactitude qui ne porte que sur les secondes est sans doute illusoire. Mais supposons qu'à une haute latitude l'expérience ait donné

$$\frac{a+a'}{2} = 88° \qquad \text{et} \qquad \frac{a-a'}{2} = 30'.$$

Il viendra $\qquad i - \dfrac{a+a'}{2} = 7'\,29'',84.$

On commettrait donc une erreur notable si l'on posait dans ce cas $i = \dfrac{a+a'}{2}$. Il en serait de même *à fortiori* si la différence $a - a'$ surpassait un degré.

Pour $\qquad \dfrac{a+a'}{2} = 88° \qquad \text{et} \qquad \dfrac{a-a'}{2} = 1°,$

on trouverait $\qquad i - \dfrac{a+a'}{2} = 29'\,59'',59.$

(*) L'angle $i - \frac{a+a'}{2}$ étant très-petit, on peut toujours le déterminer au moyen de la première partie des tables trigonométriques, qui comprend les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Le calcul de $i - \frac{a+a'}{2}$ offre donc un peu moins d'incertitude que le calcul direct de l'angle i, pour lequel il faudrait généralement recourir à la seconde partie des tables, où les logarithmes sont espacés de dix en dix secondes. Toutefois cette remarque n'a de valeur qu'en théorie, parce que la seconde partie des tables donne une approximation plus que suffisante pour les angles déduits de l'observation.

Ainsi la moyenne $\frac{a+a'}{2}$ des deux angles serait trop faible de près d'un demi-degré.

Enfin supposons l'aiguille assez mal *centrée* pour qu'à une certaine latitude elle se dirige horizontalement dans le méridien magnétique après le renversement de ses pôles. On ferait alors $a' = 0$, et les formules se réduiraient à

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} a}{2}, \qquad \operatorname{tang}\left(i - \frac{a}{2}\right) = \operatorname{tang}^3 \frac{a}{2}.$$

Ces formules seraient alors d'une nécessité incontestable. Ajoutons cependant que les boussoles d'inclinaison, telles qu'on les fabrique aujourd'hui, ne pourraient présenter cette circonstance que si l'angle a était fort petit, c'est-à-dire si elles étaient transportées dans le voisinage de l'équateur magnétique.

Notre mode de correction serait encore applicable, si, au lieu de chercher à mesurer directement l'inclinaison *absolue* i dans le méridien magnétique, on évaluait les inclinaisons *relatives* i' et i'' dans deux plans verticaux faisant entre eux un angle ε. Dans cette méthode indirecte, on calculerait i par la formule connue

$$\cot i = \frac{\sqrt{\cot^2 i' + \cot^2 i'' - 2\cos\varepsilon \cot i' \cot i''}}{\sin\varepsilon},$$

et si l'angle ε était droit, ce qui est le cas ordinaire, on aurait

$$\cot i = \sqrt{\cot^2 i' + \cot^2 i''}.$$

Comme il faut renverser les pôles de l'aiguille dans chacune des deux observations, notre calcul donnerait

dans le premier cas, $\operatorname{tang} i' = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} a'}{2}$,

et dans le second, $\operatorname{tang} i'' = \frac{\operatorname{tang} b + \operatorname{tang} b'}{2}$,

b et b' désignant les angles homologues aux angles a et a'. On obtiendrait ainsi i' et i'' plus exactement que si l'on se contentait de prendre

$$i' = \frac{a + a'}{2} \qquad \text{et} \qquad i'' = \frac{b + b'}{2},$$

et l'on serait conduit à une valeur plus rigoureuse de l'inclinaison absolue i.

En résumé, je pense que le mode de correction que je propose aurait quelque avantage même pour les observations que l'on fait avec les meilleures boussoles, et que de plus il servirait à utiliser des aiguilles d'inclinaison dont le défaut de centrage est trop grand pour être suffisamment corrigé par l'emploi des moyennes, auquel on s'est borné jusqu'ici.