NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHABERT

De quelques propositions sur les nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 250-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__250_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

DE QUELQUES
PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES.

PAR M. CHABERT,
Professeur à l'École navale.

Le carré d'un nombre entier quelconque n est égal à la somme de tous les nombres impairs depuis l'unité jusqu'au double de ce nombre diminué d'une unité.

C'est-à-dire : $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

Il est d'abord évident que la proposition est vraie pour 1, pour 2 dont le carré 4 est égal à $1 + 3$, pour 3 dont le carré 9 est égal à $1 + 3 + 5$, et il est facile de prouver que si la loi est vraie pour le nombre n, elle est encore vraie pour $n+1$, car si

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

on obtient aisément :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n^2 + 2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Donc la suite des nombres impairs représente un carré quelconque, et en prenant un nombre quelconque de termes de la série $1+3+5+ \ldots + (2n+1) +$ etc., on a nécessairement un carré. On voit aussi que les carrés sont alternativement pairs et impairs ; ce qui, au reste, est évident à priori.

Si on considère la série qui représente les cubes de tous les nombres entiers · $1 + 7 + 19 + 37 + 61 + 91 +$ etc., on voit aussi que tous les termes de cette série sont des nombres impairs ; et même tous ceux que j'ai écrits, et bien d'autres encore, sont des nombres premiers absolus ; ce qui ferait croire que la formule $3n^2 + 3n + 1$ ne représente que des nombres premiers, si on ne savait qu'il n'existe aucune formule algébrique propre à n'exprimer que des nombres premiers. (Legendre, *Théorie des nombres.*)

Mais si la formule $3n^2+3n+1$ ne contient pas seulement des nombres premiers, elle en contient un si grand nombre qu'on peut les ranger à côté de ces formules remarquables citées par Euler, Legendre, etc.

Il est aisé de voir que $3n^2+3n+1$ représente toujours un nombre impair ; mais à priori on voit que les nombres entiers étant alternativement pairs et impairs, il en sera de même de leurs puissances d'un ordre quelconque, et que par conséquent la différence entre deux puissances n^e consécutives est toujours un nombre impair ; de sorte que

$$(n+1)^m - n^m = mn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} n^{m-2} + \text{etc.....} + 1$$

est toujours un nombre impair.

On peut se demander si $3n^2+3n+1$ ne peut pas être un carré parfait? ce qui revient à dire : L'équation indéterminée $3x^2+3x+1=y^2$ est-elle susceptible de donner pour x et y des valeurs rationnelles ?

On peut appliquer à la recherche des solutions rationnelles de cette équation un procédé qui convient à tous les cas, et qu'en conséquence je vais développer sur l'équation générale.

Soit : $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ dont il s'agit de trouver les solutions rationnelles pour x et pour y.

Résolvons l'équation par rapport à x. On a

$$x = -\frac{by+d}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+d^2-4af}.$$

Pour que les valeurs de x et de y soient rationnelles, il faut et il suffit qu'il existe des valeurs rationnelles de y qui rendent la quantité sous le radical un carré parfait.

Proposons-nous donc de trouver des valeurs de y qui rendent ny^2+py+q un carré parfait.

Égalons ny^2+py+q à 0, et supposons d'abord que les valeurs de y tirées de cette équation soient réelles et égales à β et β'. On aura

$$\sqrt{ny^2+py+q}=\sqrt{(ny-n\beta)(y-\beta')};$$

on pourrait trouver tout de suite une solution en égalant les deux facteurs sous le radical; mais remarquons que, sans changer l'équation, on peut multiplier l'un de ces facteurs par une quantité arbitraire, pourvu qu'on divise l'autre par la même quantité. On a ainsi

$$\sqrt{\frac{(ny-n\beta)}{f}(fy-f\beta')};$$

et si nous posons :

$$\frac{ny-n\beta}{f}=fy-f\beta',$$

nous obtiendrons des valeurs de y fonctions de f, et qui satisferont à la question toutes les fois que f sera rationnel.

De l'équation précédente on tire :

$$y=\frac{\beta n-\beta' f^2}{n-f^2};$$

substituant cette valeur de y sous le radical, on a

$$\sqrt{ny^2+py+q}=f(y-\beta');$$

et, par suite,

$$x=-\frac{by+d}{2a}\pm\frac{f(y-\beta')}{2a}.$$

Donc, pour toute valeur rationnelle de f, on a une valeur rationnelle pour y et deux valeurs rationnelles pour x.

Mais il pourrait se faire que β et β' fussent imaginaires, alors il faudrait modifier notre méthode.

Il pourrait se faire aussi que β et β' fussent irrationnels ; ces deux cas se présentent à la fois pour l'équation $3x^2 + 3x + 1 = y^2$, car si on égale $3x^2 + 3x + 1$ à 0, on tire

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}.$$

Voici comment on peut opérer dans ce cas :

On suppose f de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Alors évidemment la valeur générale de y devient en partie réelle, en partie imaginaire ; mais le coefficient de la partie imaginaire contient b, on pourra donc profiter de l'indétermination de b pour égaler à 0 le coefficient de $\sqrt{-1}$; ensuite on disposera de a de manière à rendre le radical un carré parfait. Et il est clair que y ayant une valeur réelle, x aura aussi une valeur réelle ; car le produit

$$(y - \alpha - \beta\sqrt{-1})(y - \alpha + \beta\sqrt{-1})$$

est toujours réel quand y est réel.

Resterait à séparer les valeurs entières de x et de y : ce procédé est en général insuffisant ; mais il peut servir, dans certains cas, à trouver un grand nombre de valeurs rationnelles ; et comme il est infiniment plus simple que le procédé indiqué par Legendre, dans sa Théorie des nombres, il sera peut-être utile que j'y revienne dans un prochain article.