MIDY

Note sur les racines cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 234-242

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__234_1>

NOTE SUR LES RACINES CUBIQUES.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

Les traités d'arithmétique contiennent des méthodes pour rendre plus rapide, au moyen de divisions successives, l'extraction de la racine carrée des nombres.

L'extraction de la racine cubique est susceptible de simplifications analogues, et, comme la méthode à suivre pour les effectuer n'a encore été traitée, à notre connaissance, dans aucun ouvrage élémentaire, nous croyons utile de faire connaître et de développer par quelques exemples le procédé qui suit.

Nous ferons voir d'abord comment doit être modifiée, pour la rendre plus facile et plus prompte, la méthode usitée pour la détermination successive des chiffres de la racine. Puis après, comment, par une suite de divisions, on pourra rendre plus rapide encore la méthode indiquée.

Soit

$$N = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Supposons pour le moment que la racine $a+b$ soit entière et que b désigne le chiffre des unités, de l'égalité précédente on déduira celle-ci :

$$N - a^3 = b \times \left\{ 3a(a+b) + b^2 \right\}.$$

Faisons

$$3a(a+b) + b^2 = P,$$

nous aurons

$$N - a^3 = bP.$$

Admettons maintenant que $(a+b)$ ne soit qu'une partie de la racine totale, et que le chiffre suivant soit c; de sorte que l'on ait

$$N = (a+b+c)^3.$$

Alors

$$N - a^3 - bP,$$

sera le reste au moyen duquel il faudra déterminer c. Pour cela nous savons qu'il faudra diviser une partie convenable de ce reste par $3(a+b)^2$, et que le quotient indiquera, au moins approximativement, le chiffre à vérifier c. Or le produit connu P est évidemment une partie de ce nouveau diviseur, et leur différence

$$3ab + 2b^2,$$

ajoutée à P donnera le diviseur cherché.

Cette différence revient à

$$3ab + 3b^2 - b^2,$$

et peut s'écrire ainsi

$$3b(a+b) - b^2\ ;$$

faisons pour abréger

$$3b(a+b) = \mathrm{U},$$

et prenons la somme

$$\mathrm{P} + \mathrm{U},$$

pour diviseur. Celui-ci quoique trop fort de b^2, n'en sera que plus utile dans la pratique ; parce que le diviseur exact $3(a+b)^2$ donne presque toujours, comme l'indique la théorie, un quotient entier supérieur au chiffre cherché.

Quelques applications numériques en familiarisant avec l'emploi de ces formules, vous en démontreront l'utilité.

Pour que l'on puisse suivre commodément les calculs, et en saisir l'ensemble avec plus de facilité, nous écrirons, en dehors du texte, le tableau ou le type de chaque opération.

Premier exemple.

Soit à trouver la racine cubique de 12 000 000 000.

Opération principale.

```
     12 000 000 000
      8          | 2
     -----       |---
      4 000      |
P₁ =  1 324      | 2
     ------------------
      1 352 000 |
P₄ =    150 544 | 8
------------------------
      147 648 000 |
P₅ =   15 656 841 | 9
--------------------------
        6 736 431
```

$$\sqrt[3]{12\ 000\ 000\ 000} = 2289.$$

Opérations partielles.

```
        23
        50
     ------
P₁ = 1389

        22
        60
     ------
P₂ = 1324

        22
         6
     ------
U₂ =   132

S₂ = P₂ + U₂ = 1456
```

```
        229                 228
        660                 660
      -------             -------
       13 821              13 744
         1374                1368
     ----------          ----------
P₃ = 151 221         P₄ = 150 544
                     U₄ =   5 472
                          --------
        228          S₄ = 156 016
         24
       -----
        912
       456
      ------
U₄ = 5472                  2 289
                           6 840
                        ---------
                          91 641
                        18 31 2
                      137 34
                      ----------
                 P₅ = 156 56 841.
```

Le premier chiffre de la racine est 2; le reste correspondant est 4. Descendant la tranche, l'on a 40 à diviser par 12, le quotient est 3. Alors $a+b=23$; multipliant ce nombre par $3a=60$, et ajoutant 9, l'on a pour première valeur de P, le nombre 1389 qui multiplié par $b=3$ donne un produit supérieur à 4000. La soustraction est donc impossible, et le chiffre 3 est trop fort. Mais avec 2 la soustraction peut s'effectuer, et le reste correspondant 1352, suivi d'un zéro, donnera le nouveau dividende. $U=132$, par suite $P+U=1456$; le quotient correspondant est 9. Mais le produit bP ne peut se soustraire du reste; essayons 8, la soustraction devient possible et 147648 est le reste correspondant. La division de 1476480 par S_4 donne le chiffre 9, que l'on vérifie, et l'on a enfin 2289 pour la racine cubique demandée.

Deuxième exemple.

Soit à extraire avec 4 décimales la racine cubique de 40. L'opération se fera, d'après la méthode indiquée, conformément au tableau ci-joint.

Opération principale.

40	
27	3
13 000	
3 076	4
696 000	
347 821	1
348 179 000	
34 986 451	9
34 301 041 000	
3 507 791 511	9
2 730 917 401	

$\sqrt{40} = 3.4199$

Opérations partielles.

$S_1 =$ 27

34	341
90	1020
$P_2 =$ 3076	6821
340	341 000
68	$P_3 =$ 347 821
$S_2 =$ 3684	

3 419
10 230
102 651
683 8
34 19
$P_4 =$ 34 976 451

34 199
102 570
2 394 011
17 099 5
68 398
3419 9
$P_5 =$ 35 077 91 511

Emploi de la division pour abréger les calculs.

Lorsqu'on aura calculé par la méthode précédente plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre, on pourra, en s'appuyant sur les mêmes formules, déterminer plus rapidement par la division les chiffres restants.

En effet, soit a un nombre de $n+1$ chiffres, suivi de n zéros et b un nombre de n chiffres. Nommons N le cube de la somme $a+b$, la racine aura $2n+1$ chiffres, et l'on aura

$$\frac{N-a^3}{3a^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}.$$

D'après ce

$$a > 10^{2n}, \quad b < 10^n,$$

d'où

$$b^2 < 10^{2n}, \qquad \frac{b^2}{a} < 1.$$

De plus, puisque l'on a

$$b^3 < 10^{3n}, \qquad a^2 > 10^{4n},$$

il suit que

$$\frac{b^3}{3a^2} < \frac{10^{3n}}{3.10^{4n}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{3.10^n}.$$

D'où l'on voit que la somme

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2},$$

en général moindre que l'unité, n'en pourrait différer en plus que d'une quantité $< \frac{1}{3.10^n}$.

Application.

On détermine par la méthode précédente la partie 2,71 formée par les trois premiers chiffres de la racine cubique de 20.

Opération principale.

20	
8	2
12 000	
1 669	7
317 000	
219 511	1
97 489	

Opérations partielles.

28	27
60	60
1746	1669
	540
	27
	2236
	271
	810
	2711
	2168
	219511
	813
	220324

Première division.

972	220
96	44

97489 000 000
97099 601 984
389 398 016

Deuxième division.

38939	22103
16836	1761
1364	
31	
16	

$$\sqrt[3]{20} = 2{,}71441761.$$

Les deux chiffres 44 qui suivent 2,71 s'obtiennent par la division. Pour cela on écrira deux zéros à la droite du reste 97489 et l'on divisera le nombre résultant 9748900 par 220324. On sait que dans une division dont les deux termes sont de grands nombres, les premiers chiffres à la droite du dividende et du diviseur n'ont qu'une faible influence sur les chiffres du quotient. On pourra donc se borner ici à diviser 974 par 220, en faisant usage de la méthode approximative connue, et le quotient 44 donnera les deux chiffres cherchés de la racine dont la partie connue deviendra par conséquent 27144. Pour la vérifier, on retranchera le produit bP de 97489000000 et l'on aura le reste correspondant 389398016. Écrivant 4 zéros à la droite, et divisant le nombre qui en résulte par la valeur correspondante de $P+U$, ou seulement 38939 par 22103, le quotient 1761 complétera l'extraction, et l'on aura ainsi

$$\sqrt[3]{20} = 2{,}71441761\,,$$

à moins de $\dfrac{1}{100\,000\,000}$ d'unité près.