Nouvelles annales de mathématiques

A. G. Colombier

Démonstration du théorème 68

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 22-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__22_0>

DEMONSTRATION DU THÉOREME 68 (p. 327, t. II).

PAR P. A. G. COLOMBIER.
Regent de mathematiques à Beziers

Quatre points (o, s, o', s') (fig. 5) *etant placés harmoniquement* (os : o's :: os' : o's') *sur une droite* (PQ) ; *une circonférence qui passe par deux points conjugués* (o, o') *coupe orthogonalement la circonference décrite sur la distance des deux autres points conjugués* (s, s') *comme diamètre.*

Démonstration. Soit c le centre d'une circonférence passant par o, o' ; et c' celui de la circonference décrite sur ss' comme diamètre. La circonférence qui a son centre en c devant passer par un point o' du diamètre ss' de l'autre circonference, il est certain que les circonférences seront toujours secantes. Soit A l'un quelconque des deux points d'intersection. Il faut prouver que les tangentes menées aux circonférences par ce point sont orthogonales. Mais s'il en est ainsi, la tangente à l'une quelconque des deux circonférences est normale à l'autre en A ; dès lors, d'apres un principe connu, ces deux normales doivent passer par les centres c,c'. Donc la question se réduit à prouver que le triangle cAc' est rectangle en A, ou, plus simplement, qu'on a la relation

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}^2 .$$

En effet, désignons par r le rayon de la circonference c

On a $$\overline{Ac}^2 = r^2. \qquad (1)$$

Représentons os, $o's$ par a et b, dès lors, d'après la proportion harmonique, on a $os' = a\dfrac{a+b}{a-b}$, et d'après la figure, il vient

$$2Ac' = ss' = os' - os = \frac{2ab}{a-b}, \text{ d'où}$$

$$\overline{Ac'}^2 = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}. \qquad (2)$$

On trouve facilement d'après la proportion, et de ce que le triangle cBc' est rectangle,

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cB}^2 + \frac{(a^2+b^2)^2}{4(a-b)^2}.$$

Si l'on joint co', le triangle rectangle cBo' donne

$$\overline{cB}^2 = r^2 + \frac{(a+b)^2}{4};$$

en éliminant $\overline{cB}^2$ par addition, et réduisant le second membre il vient

$$\overline{cc'}^2 = r^2 + \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}. \qquad (3)$$

De ce que l'équation (3) est la somme des équations (1), (2), il s'ensuit qu'on a

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}^2.$$

Donc le triangle $cc'A$ est rectangle en A; par conséquent les tangentes aux deux premières circonférences, menées par l'un quelconque de leurs points d'intersection, sont orthogonales. C. Q. F. D.