NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RISPAL

Solution du problème 77

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 226-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__226_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 65 77 (p. 454, tome II).

PAR M. RISPAL,
Élève du collége de Rouen (institution Lévy).

1° On fait tourner l'angle θ de manière que ses côtés soient toujours tangents à une section conique ; quel est le lieu décrit par un point du plan de l'angle ?

2° On fait tourner une section conique de sorte qu'elle touche constamment les deux côtés d'un angle θ ; quel est est le lieu décrit par un point de la courbe ?

Indiquer une équation qui puisse résoudre à la fois les deux questions ; faire des applications à des cas particuliers. (Le Besgue.)

Soit une ellipse (*fig.* 24), rapportée à son centre et à ses axes ; $y'Ax'$ un angle θ tangent à cette courbe ; M un point tel que

$$MP = y_1 \quad OP = x_1$$
$$MQ = \beta \quad AQ = \alpha.$$

Si je puis trouver en fonction des données de la question, une relation telle que

$$f(y_1, x_1, \beta, \alpha) = 0,$$

je dis que cette équation répondra à la question. En effet, si on y suppose α et β constantes, tandis que y_1 et x_1 sont variables, elle représentera le lieu du point M se mouvant en demeurant invariablement attaché au plan de l'angle A, qui se meut avec lui. Si, au contraire, on suppose y_1 et x_1 constantes, α et β variables, on aura le lieu du point M invariablement attaché à la courbe qui se meut en restant constamment tangente aux côtés de l'angle θ.

Appliquons ce procédé.

Soient les équations des droites Ax' et Ay'

$$(1) \qquad (Ax') \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$(2) \qquad (Ay') \qquad y = m'x + \sqrt{a^2m'^2 + b^2}$$

liées entre elles par la relation

$$(3) \qquad \text{tang}\,\theta \text{ ou } \delta = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

D'après un théorème connu, la distance MQ d'un point M à une droite AQ suivant un angle θ, sera

(4) $$\text{MQ ou } \beta = \frac{y_1 - mx_1 - \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}};$$

de même, AQ = MV = α donne

(5) $$\alpha = \frac{y_1 - m'x_1 - \sqrt{a^2m'^2 + b^2}}{\sqrt{1+m'^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}},$$

et il ne s'agit plus que d'éliminer m et m' entre les trois équations (3), (4), (5). Or, dans le cas général, cette élimination est extrêmement compliquée, car les deux équations en m résultantes, sont toutes deux du quatrième degré. Mais faisons application à quelques cas particuliers.

1° Lieu du sommet d'un angle constant tournant tangentiellement à une ellipse. Dans ce cas, le point M coïncide avec A, et on a $\alpha = \beta = 0$.

Alors les équations deviennent

$$\delta = \frac{m - m'}{1 + mm'}, \quad 0 = y_1 - mx_1 - \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$
$$0 = y_1 - m'x_1 - \sqrt{a^2m'^2 + b^2}.$$

Elles se réduisent à

$$m^2 - \frac{2x_1y_1}{x_1^2 - a^2}m + \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = 0,$$
$$m'^2 - \frac{2x_1y_1}{x_1^2 - a^2}m' + \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = 0,$$
$$\delta = \frac{m - m'}{1 + mm'} \quad \text{ou} \quad \delta(1 + mm') = m - m'.$$

Les deux premières rentrant l'une dans l'autre.

Donc mm' est le produit des racines de l'une d'elles, et $m - m'$ est la différence de ces mêmes racines. On en tire

$$\delta\left(1 + \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2}\right) = \frac{2\sqrt{x_1^2y_1^2 - (y_1^2 - b^2)(x_1^2 - a^2)}}{x_1^2 - a^2},$$

ou $$y_1^2+x_1^2-a^2-b^2=\frac{2\sqrt{a^2y_1^2+b^2x_1^2-a^2b^2}}{\delta}.$$

Cette équation est du quatrième degré dans le cas général. Si les tangentes deviennent perpendiculaires entre elles, $\delta=\infty$; d'ailleurs le numératenr ne peut jamais devenir nul pour aucune valeur réelle de y_1 et de x_1 ; il est toujours réel, et l'équation devient alors

$$y_1^2+x_1^2=a^2+b^2,$$

ce que l'on savait déjà.

2° Lieu du centre des ellipses tangentes à deux droites faisant un angle θ.

Dans ce cas nous prenons les deux tangentes pour axes, et $x_1=y_1=0$; les équations deviennent ainsi

$$\beta=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}},\qquad \alpha=\frac{\sqrt{a^2m'^2+b^2}}{\sqrt{1+m'^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}},$$

ou

$$\beta^2(1+m^2)\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)=a^2m^2+b^2,$$

$$\alpha^2(1+m'^2)\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)=a^2m'^2+b^2,$$

d'où

$$m^2=\frac{(b^2-\beta^2)\,\delta^2-\beta^2}{\beta^2(1+\delta^2)-a^2\delta^2}=\frac{(b^2-\beta^2)\,\delta^2-\beta^2}{\beta^2+(\beta^2-a^2)\,\delta^2},$$

$$m'^2=\frac{(b^2-\alpha^2)\,\delta^2-\alpha^2}{\alpha^2(1+\delta^2)-a^2\delta^2}=\frac{(b^2-\alpha^2)\,\delta^2-\alpha^2}{\alpha^2+(\alpha^2-a^2)\,\delta^2};$$

d'ailleurs

$$m'=\frac{m-\delta}{1+\delta m}.$$

Nous n'essayerons pas l'élimination dans le cas général ; mais si nous supposons que l'angle des tangentes soit droit, alors $\delta=\infty$, et en divisant par δ^2 les deux termes, on aura

$$m^2 = \frac{b^2 - \beta^2}{\beta^2 - a^2}, \qquad m'^2 = \frac{b^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - a^2};$$

d'ailleurs, à cause de la perpendicularité, on a $mm' = -1$, $m^2m'^2 = 1$;

donc
$$\frac{(b^2 - \beta^2)(b^2 - \alpha^2)}{(\beta^2 - a^2)(\alpha^2 - a^2)} = 1,$$

$$b^4 - \alpha^2 b^2 - \beta^2 b^2 = a^4 - a^2\beta^2 - a^2\alpha^2,$$

ou
$$(a^2 - b^2)\beta^2 + (a^2 - b^2)\alpha^2 = a^4 - b^4,$$

et enfin
$$\beta^2 + \alpha^2 = a^2 + b^2,$$

résultat que l'on pouvait aussi aisément prévoir.

Ces exemples suffisent pour faire voir avec quelle facilité on peut déduire tous ces lieux, si connus, des trois équations que nous avons données. Dans le cas de l'hyperbole, on aurait les mêmes résultats, avec cette seule différence qu'il faudrait partout changer b^2 en $-b^2$.

On peut faire le même calcul dans la parabole, en partant de l'équation de la tangente

$$y = mx + \frac{p}{2m};$$

on a alors les trois équations

$$\delta = \frac{m - m'}{1 + mm'}, \qquad \beta = \frac{y_1 - mx'_1 - \frac{p}{2m}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}},$$

$$\alpha = \frac{y_1 - m'x_1 - \frac{p}{2m'}}{\sqrt{1 + m'^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}}.$$

L'élimination donne encore deux équations en m du quatrième degré.

Nous remarquerons seulement que le lieu des sommets d'un angle constant tangent à la parabole est une hyperbole;

dans ce cas, $\beta = \alpha = 0$, et les équations deviennent

$$2my_1 - 2m^2x_1 - p = 0, \qquad 2m'y_1 - 2m'^2x_1 - p = 0,$$

ou

$$m^2 - \frac{y_1}{x_1}m + \frac{p}{2x_1} = 0,$$

alors

$$mm' = \frac{p}{2x_1}, \qquad m - m' = \frac{\sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{x_1},$$

$$\delta\left(\frac{p + 2x_1}{2}\right) = \sqrt{y_1^2 - 2px_1},$$

$$p^2\delta^2 + 4p\delta^2x_1 + 4\delta^2x_1^2 = 4y_1^2 - 8px_1^2.$$

Cette équation représente une hyperbole dont le centre est situé sur l'axe de la parabole et ayant avec la parabole une directrice et un foyer communs; comme il est facile de le voir. Pour $\delta = \infty$, elle se réduit à

$$p^2 + 4px_1 + 4x_1^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad x_1 = -\frac{p}{2},$$

comme on le savait d'ailleurs.