E. DESMAREST

Note sur les intersections successives des lignes de contact

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 220-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__220_1>

NOTE

SUR LES INTERSECTIONS SUCCESSIVES DES LIGNES DE CONTACT.

PAR M. E. DESMAREST,
ancien élève de l'École polytechnique (*).

Deux courbes algébriques étant données, si des divers points de l'une on mène des tangentes à l'autre, déterminer le lieu géométrique des intersections successives des lignes qui unissent les points de contact.

Les équations des courbes étant

$$F(xy) = 0 \qquad \varphi(xy) = 0,$$

les tangentes à la première courbe sont représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{X'}{Y'}(x - x')$$

ou

$$yY' + xX' - (y'Y' + x'X') = 0.$$

(*) *V.* t. I, p. 263.

1° x', y' désignent les coordonnées d'un point de contact ; 2° Y', X' sont les polynômes dérivés pris par rapport à y et à x ; on démontre que la position sur la première courbe du point $x'y'$, opère toujours une réduction dans le polynôme $y'Y' + x'X'$.

Si nous nommons x'', y'' les coordonnées d'un point de la courbe $\varphi(xy) = 0$, et si la tangente passe en ce point, l'équation de la ligne des contacts sera

$$y''Y' + x''X' - (y'Y' + x'X') = 0,$$

ou en posant $y'' = f(x'')$,

$$\text{(A)} \qquad Y'f(x'') + X'x'' - (y'Y' + x'X') = 0;$$

si nous donnons à x'' l'accroissement h, l'équation de la nouvelle ligne sera

$$\text{(B)} \qquad Y'f(x'') + Y'f'(x'')h + Y'f''(x'')\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}, + \\ + X'x'' + X'h - (y'Y' + x'X') = 0;$$

l'abscisse du point d'intersection des deux lignes est donnée par l'équation

$$Y'f'(x'')h + Y'f''(x'')\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}, + X'h = 0.$$

Si 1° on divise par h, et 2° on suppose $h = 0$, l'abscisse du point d'intersection, de deux lignes infiniment rapprochées, sera donnée par l'équation

$$Y'f'(x'') + X' = 0,$$

ainsi le lieu géométrique des intersections successives des lignes de contact sera obtenu en éliminant x'', y'' des trois équations

$$Y'f'(x'') + X' = 0, \quad Y'f(x'') + X'x'' - (y'Y' + x'X') = 0, \\ \varphi(x''y'') = 0,$$

et l'équation *finale*

$$\psi(x', y') = 0$$

sera l'équation du lieu géométrique cherché.

Première application. **Les deux courbes données sont des sections coniques, et sont, pour faciliter les calculs, rapportées au même sommet pris comme origine, au même axe; leurs équations sont**

$$y^2 = mx + nx^2, \qquad y^2 = px + qx^2,$$

l'équation de la tangente à la première courbe est

$$2yy' - (m + 2nx')x - mx' = 0;$$

la condition de passer par un point x', y'' de la seconde courbe donne

$$2y''y' - (m + 2nx')x'' - mx' = 0, \qquad y''^2 = px'' + qx''^2;$$

ainsi les deux cordes de contact sont représentées par les équations

$$\text{(C)} \qquad 2y'f(x'') - (m + 2nx')x'' - mx' = 0,$$

$$\text{(D)} \qquad 2y'f(x'') + 2y'f'(x'')h + \text{etc.} - (m + 2nx')x'' - (m + 2nx')h - mx' = 0;$$

l'intersection de ces deux droites donne, après avoir 1° divisé par h, 2° supposé $h = 0$,

$$\frac{y'(p + 2qx'')}{y''} - (m + 2nx') = 0;$$

on doit donc éliminer $x''y''$ des trois équations

$$\text{(E)} \qquad py' + 2qy'x'' - y''(m + 2nx') = 0,$$

$$2y'y'' - (m + 2nx')x'' - mx' = 0, \qquad y''^2 - px'' - qx''^2 = 0;$$

des deux premières on déduit

$$x'' = \frac{2py'^2 - mx'(m + 2nx')}{(m + 2nx')^2 - 4qy'^2}, \quad y'' = \frac{py'(m + 2nx') - 2mqy'x'}{(m + 2nx')^2 - 4qy'^2},$$

ces valeurs, subtituées dans la troisième équation du groupe E, donne l'équation du lieu géométrique cherché:

$$\text{(M)} \; mpx'(m + 2nx')^2 - (m^2qx'^2 + p^2y'^2)(m + 2nx') - 4mpqx' = 0 \; (*)$$

(*) Cette équation est le résultat que l'on obtient après la suppression du facteur $m + 2nx'$: ce facteur est étranger. 1° il ne peut être nul lorsque la première courbe donnée est une parabole; 2° si cette première courbe est une ellipse ou une hyperbole, il représente une droite passant au centre et parallèle à l'axe des

Examinons quelques cas particuliers.

1° Si les deux lignes données sont des paraboles, on a $n=0$, $q=0$, et le lieu géométrique est

$$y^2=\frac{m^2}{p}x;$$

si à la condition précédente on ajoute la condition $p=-m$, le lieu géométrique est

$$y^2=-mx;$$

donc si les deux paraboles sont identiques, mais opposées au sommet, le lieu cherché est la seconde parabole donnée.

2° Si la première courbe est une hyperbole et la seconde une parabole, on doit, dans l'équation générale M, supposer $q=0$; la nouvelle équation, divisée par le facteur $m+2nx$, donne

$$y^2=\frac{m^2}{p}x+\frac{2mn}{p}x^2.$$

3° Si la première courbe est une ellipse, la seconde une parabole, on doit, dans l'équation (M), 1° changer le signe de n, 2° supposer $q=0$, on a

$$y^2=\frac{m^2}{p}x-\frac{2mn}{p}x^2.$$

Nous pourrions ainsi examiner les modifications apportées dans l'équation M par les divers assemblages de deux sections coniques, mais l'examen des courbes à centre, fait en prenant ce centre pour origine, facilite le calcul et fait mieux ressortir quelques-unes des particularités que présentent les lieux géométriques obtenus.

Les deux courbes primitives sont

$$y^2+mx^2=n, \qquad y^2+px^2=q;$$

---

y et on peut facilement démontrer que cette droite est le lieu géométrique des intersections successives des cordes de contact lorsque le point de départ des tangentes est un point quelconque de l'axe des x.

si nous conservons les notations précédentes, les deux cordes de contact seront représentées par les équations

$$y'\sqrt{q-px''^2}+mx'x''-n=0,$$

$$y'\sqrt{q-px''^2}-\frac{py'x''}{\sqrt{q-px''^2}}h-\text{etc.}+mx'x''+mx'h-n=0.$$

La rencontre des deux cordes donne, après la division par h et la supposition $h=0$,

$$-py'x''+mx'y''=0;$$

l'élimination doit donc avoir lieu entre les trois équations

$$py'x''+my''x'=0,\quad y''y'+mx''x'-n=0,\quad y''^2+px''^2-q=0,$$

l'équation finale est

$$\text{(N)}\qquad q(py'^2+m^2x'^2)^2-n^2p^2y'^2-m^2n^2px'^2=0.$$

1° Si les courbes données sont des ellipses, on doit conserver les signes attribués aux quantités m, n, p, q; on peut, à cette première condition, en ajouter une seconde, admettre, par exemple, que la deuxième courbe est un cercle particulier, c'est-à-dire est le lieu des rencontres deux à deux des tangentes normales; on a alors $p=1$, $q=\frac{n(m+1)}{m}$; l'équation N est alors, après la suppression du facteur $y'^2+m^2x'^2$,

$$y'^2+m^2x'^2=\frac{nm}{m+1};$$

les foyers de cette dernière ellipse sont ceux de l'ellipse donnée.

2° Si les courbes données sont des ellipses ou des hyperboles semblables, le lieu géométrique est une ellipse ou une hyperbole semblable aux courbes données.

3° Si la première courbe est une ellipse, la deuxième une hyperbole, et si les axes sont égaux, on doit 1° changer les signes de p et de q ; 2° supposer $p=m$, $q=n$, l'équation générale N devient

$$y''^2 - mx''^2 = -n;$$

le lieu géométrique est donc l'hyperbole même qui est le point de départ des tangentes.

4° Si les conditions précédentes sont renversées, le résultat est également renversé : le lieu géométrique est l'ellipse même qui est le point de départ des tangentes.

Deuxième application. Nous donnerons comme dernière application l'exemple de deux courbes appartenant à une famille remarquable, citée souvent dans les premières recherches sur le calcul différentiel :

$$y-b-c(x-a)^m=0, \qquad y-p-q(x-d)^{\mathrm{R}}=0;$$

la tangente à la première courbe est

$$y-mc(x'-a)^{m-1}x-mb+(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0;$$

les lignes de contact seront représentées par l'équation

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{aligned} p+q(x''-d)^{\mathrm{R}}-mc(x'-a)^{m-1}x''-mb+\\ +(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0. \end{aligned}$$

Si on fait osciller cette ligne en donnant à x'' l'accroissement h, on a

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{aligned} p+q(x''-d)^{\mathrm{R}}+\mathrm{R}q(x''-d)^{\mathrm{R}-1}h+\text{etc.},-\\ -mc(x'-a)^{m-1}x''-mc(x'-a)^{m-1}h-mb+\\ +(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0; \end{aligned}$$

l'intersection de ces lignes donne, après la division par h, et la supposition $h=0$,

$$\mathrm{R}q(x''-d)^{\mathrm{R}-1}-mc(x'-a)^{m-1}=0;$$

l'élimination doit donc avoir lieu entre les trois équations

$$(\mathrm{V}) \quad \mathrm{R}y''-\mathrm{R}p-mcx''(x'-a)^{m-1}+dmc(x'-a)^{m-1}=0,$$
$$y''-mc(x'-a)^{m-1}-mb+(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0,$$
$$y''-p-q(x''-d)^{\mathrm{R}}=0.$$

Les deux premières donnent

$$x'' = \frac{Rp - Rmb + Ry'(m-1) + mc\,(aR - d)\,(x'-a)^{m-1}}{mc(R-1)\,(x'-a)^{m-1}},$$

$$y'' = \frac{Rp - mb + (m-1)y' + mc(a-d)(x'-a)^{m-1}}{R-1};$$

ces valeurs, substituées dans la troisième équation du groupe (V), donnent

$$\text{(U)}\quad \frac{Rp - mb + (m-1)y' + mc(a-d)\,(x'-a)^{m-1}}{R-1} - q -$$

$$- d\left[\frac{Rp - Rmb + Ry'(m-1) + mcR(a-d)\,(x'-a)^{m-1}}{mc(R-1)\,(x'-a)^{m-1}}\right]^{R} = 0.$$

On peut, de ce cas général, déduire l'exemple des deux paraboles données dans la première application, on doit alors supposer

$$b=0,\quad a=0,\quad p=0,\quad d=0,\quad m=2,\quad R=2,$$

on a alors l'équation finale

$$y''^2 = \frac{c^2}{q}\,x''^2.$$

Si on suppose $c = \frac{1}{m}$, $q = \frac{1}{p}$, si on change les x en y, et *vice versâ*, les deux paraboles sont $y^2 = mx$, $y^2 = px$, c'est-à-dire sont celles qui ont été indiquées primitivement, et le lieu géométrique donné par l'équation (U) est, comme dans l'exemple cité,

$$y^2 = \frac{m^2}{p}\,x.$$