NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorie élémentaire des nombres. D’après Euler, Legendre, MM. Gauss et Cauchy

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 204-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__204_0>

THÉORIE ELÉMENTAIRE DES NOMBRES,

D'après Euler, Legendre, MM. Gauss et Cauchy.

—

1. Pour donner plus d'ensemble à cette exposition, nous croyons utile de remonter aux notions et aux propositions primitives. Dans tout ce qui suit, on emploie les lettres pour représenter des nombres *entiers positifs*; observation essentielle qu'il ne faut jamais perdre de vue.

2. *L'unité*, c'est l'idée abstraite d'un objet quelconque considéré comme existant seul.

3. *Compter*, c'est ajouter l'unité successivement à elle-même et donner un nom à cette agrégation; le *nombre* est cette agrégation d'unités. L'équation suivante contient la définition du nombre :

$$a\,1 = 1.a \tag{1}$$

Il n'existe pas de dernier nombre.

4. La *numération parlée* est un système limité de signes vocaux (mots) au moyen desquels on peut nommer tous les nombres dont peuvent avoir besoin les sciences, les arts et diverses professions sociales.

5. La *numération écrite* est un système limité de signes graphiques (chiffres) au moyen desquels on peut représenter tous les nombres.

6. La série des nombres *naturels* est la suite des nombres $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$. Il faut se représenter cette suite comme écrite sur une demi-circonférence de rayon infini, de sorte que $+\infty$ est diamétralement opposé à zéro; et sur l'autre demi-circonférence, aussi à partir de zéro, on écrit la suite naturelle des nombres négatifs $0, -1, -2 \ldots\ldots -\infty$, de sorte

que $+0$ et -0, $+\infty$ et $-\infty$ se confondent. C'est une observation essentielle dont l'oubli entraîne à d'étranges hérésies (*).

7. La série des nombres naturels donne lieu à deux opérations principales : 1° *compter en avant*, en allant vers $+\infty$, c'est *l'addition*; 2° *compter en arrière*, en allant vers $-\infty$, c'est la *soustraction*. Quel est le septième nombre après 13 ? *Réponse :* 20. Quel est le treizième nombre après 7 ? *Réponse :* 20 ; et le résultat s'écrit : $13+7=7+13$, et en général $a+b=b+a$ (2). Quel est le septième nombre après 13 en allant vers $-\infty$? *Réponse :* $+6$, ou $13-7=+6$. Quel est le vingtième nombre après 13 en marchant vers $-\infty$? *Réponse :* -7, ou $13-20=-7$. L'addition et la soustraction sont deux opérations *inverses* et peuvent servir à se contrôler mutuellement.

8. *Problème* 1. Etant donné le polynôme $a_1+a_2+a_3+\ldots a_n$, les nombres étant positifs ou négatifs, combien y a-t-il de manières d'obtenir le résultat? Nous donnerons plus bas une solution simple de ce problème difficile (p. 208).

9. Lorsque dans *l'addition* de plusieurs nombres tous les nombres sont égaux, l'opération prend le nom de *multiplication* et le résultat se nomme *produit*.

Théorème 1. $ab=ba$ (3). *Démonstration*. On a $a.1=1.a$, donc $a.1+a.1=1.a+1.a$, ou $a(1+1)=(1+1)a$, et en continuant, on parvient à $ab=ba$. On peut aussi imaginer a rangées de b carrés chacune; le nombre total de carrés sera représenté par ab et par ba. Le même genre de raisonnement sert à démontrer que les six permutations de abc donnent le même produit : on imagine un assemblage de cubes égaux rangés

(*) Il est utile aussi de remarquer que $0\sqrt{-1}$ et 0 se confondent ainsi que $\infty\sqrt{-1}$ et ∞. Pour les distinguer, dans l'algèbre appliquée, il faut examiner l'etat de ces quantités un instant avant et après qu'elles s'annulent ou deviennent infinies. Cet examen est devenu l'objet d'un genre d'operations que M. Cauchy désigne sous le nom de calcul des *résidus* et pour lequel il a imaginé un algorithme special. Il faut aussi toujours se rappeler que 0 et ∞ sont des expressions *réciproques* en forme de parallélipipède (*), on en compte un nombre a dans le sens de la longueur, un nombre b dans le sens de la largeur, et un nombre c dans le sens de la hauteur; il y aura six manières, correspondant aux six permutations, de trouver le nombre total des cubes, qui est toujours le même. (Legendre, *Théorie des nombres*, Introduction, § 2.)

10. *Théorème* 2. Dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications de n facteurs, on parvient toujours au même produit.

Démonstration. Supposons que le théorème soit vrai pour un nombre de facteurs moindre que n; de quelque manière qu'on s'y prenne, l'opération se termine toujours par la multiplication de deux facteurs, qui sont généralement eux-mêmes produits de facteurs simples. Soient, pour un de ces modes d'opérer, P_r et P_s deux de ces derniers facteurs composés, les indices r et s indiquent le nombre de facteurs simples qui entrent respectivement dans ces facteurs multiples; on a évidemment $r+s=n$. Soient $P_{r'}$ et $P_{s'}$ les deux derniers facteurs correspondant à un autre mode d'opérer, on a encore $r'+s'=n$; P_r a nécessairement un certain nombre de facteurs simples en commun avec $P_{r'}$ ou avec $P_{s'}$; admettons le premier cas et désignons par P_t le produit des t facteurs communs: r etant plus petit que n, on peut multiplier d'abord entre eux ces facteurs communs, on a donc

$$P_r = P_t \,.\, P_{r-t};\ P_{r'} = P_t \,.\, P_{r'-t}:$$

donc

$$P_r \,.\, P_s = P_t \,.\, P_{r-t} \,.\, P_s$$

$$P_{r'} P_{s'} = P_t \,.\, P_{r'-t} \,.\, P_{s'};$$

or $P_{r-t} \,.\, P_s = P_{r'-t} \,.\, P_{s'}$, car ces deux produits renferment les mêmes facteurs simples et en nombre moindre que n; de quelque manière qu'on effectue le produit, il doit donc, d'après la supposition, rester le même; donc aussi $P_r \,.\, P_s = P_{r'} \,.\, P_{s'}$.

(*) Il serait plus conforme à l'étymologie d'écrire parallélépipède.

Or le théorème est vrai pour trois facteurs, il subsiste donc aussi pour quatre facteurs, etc.

11. *Problème* 2. De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs inégaux?

Solution. Désignons par le symbole P_n ce nombre de manières; et par P_{n+1} ce nombre lorsqu'il survient un nouveau facteur K, et que l'on a $n+1$ facteurs; cherchons la relation entre P_{n+1} et P_n. De quelque manière qu'on s'y prenne pour effectuer P_n, il faudra toujours exécuter $n-1$ multiplications. Ceci est évident lorsqu'on multiplie le premier facteur par le second; ce premier produit par le troisième facteur; ce second produit par le quatrième facteur, et ainsi de suite : il en est encore de même lorsqu'on exécute par groupes. Exemples · soit $n=12$, il faut onze multiplications, par le mode successif; et si on décompose en trois groupes de trois, quatre et cinq facteurs, le premier groupe nécessite deux multiplications, le second en exige trois et le troisième quatre; à quoi il faut ajouter deux multiplications pour les trois groupes; ainsi, en tout, encore onze; et le même raisonnement s'applique à un nombre quelconque de facteurs.

Cela posé, soient d'abord deux facteurs a, b, on a évidemment $P_2=2$, savoir : ab, ba; prenons un troisième facteur c; on peut le combiner comme multiplicateur, ou multiplicande avec ab, entièrement effectué, ce qui donne deux manières, cab, abc; ou bien encore faire intervenir c pendant la multiplication; ainsi, $ac\times b$, $ca\times b$, $a\times bc$, $a\times cb$, ce qui donne quatre manières, en tout six manières; raisonnant de même sur ba, on voit que l'on a $P_3=12=2.6$; prenons un quatrième facteur d, et combinons-le avec le produit abc; d'abord entièrement effectué, on obtient deux manières $dabc$, $abcd$; ensuite pendant l'opération, abc exige deux multiplications; en introduisant d pendant la première, celle de a par bc, on obtient quatre manières · $ad.bc$, $da.bc$, *a. dbc*, *a. bdc*, et autant pendant la seconde multiplication, celle de *ab* par *c* ; en tout dix manières. On en dit autant d'un produit quelconque, d'où $P_4 = 120 = 2.6.10$; on trouverait de même $P_5 = 2.6.10.14$; et ainsi de suite.

En général, soit M une des manières employées pour obtenir le produit de n facteurs. Le nouveau facteur K peut se combiner, multiplicande ou multiplicateur avec M, ce qui donne deux manières ; si on l'introduit pendant l'exécution, il y a $n - 1$ multiplications dont chacune donne quatre manières, et en tout $4(n-1)+2 = 4n-2$; ce qu'on dit pour M peut s'appliquer à toute autre manière d'obtenir le produit de n facteurs; donc

$$P_{n+1} = (4n-2)P_n \quad \text{ou bien} \quad P_n = (4n-6)P_{n-1}.$$

Faisant successivement $n = 2, 3, 4, \ldots\, n$, et considérant que $P_1 = 1$, on a

$$P_2 = 2; \quad P_3 = 2.6; \quad P_4 = 2.6.10; \quad P_6 = 2\,6.10.14;$$
$$P_8 = 2.6.10.14.18;$$

et $P_{n+1} = 2.6.10\ldots(4n-6) = 2^n.1.3.5\ldots 2n-3 = \dfrac{2[2n-3]}{[n-2]}$;

les crochets désignent un produit continuel.

Observation. Cette ingénieuse solution est due à M. Rodrigues (Olinde). La formule avait été trouvée auparavant par M. Catalan (E.), à l'aide de considérations combinatoires. (*Journal* de Liouville, t. III, p. 515 et 549. 1838.)

12. *Problème* 3. De combien de manières peut-on effectuer un produit de n facteurs, lorsqu'il y a des facteurs égaux ?

Solution. Soit $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, et $\alpha + \beta + \gamma, \ldots = n$ on aura

$$P_n = \frac{2.6.10\ldots 4n-6}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)(1.2.3\ldots\gamma)\ldots}.$$

Cette formule, déduite de la théorie combinatoire est aussi de M. Catalan. (*Journal* de Liouville, t. VI, p. 74. 1841.)

Observation. Ces solutions conviennent aussi au problème 1 (8).

(*La suite prochainement*)