J. MARCOU

Question de géométrie analytique proposée au concours de l'École normale

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 201-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__201_1>

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

proposée au concours de l'École normale. (p. 393, t. I.)

PAR M. MARCOU (J.),
Élève au collége de Besançon.

Je prends pour axe des x le grand axe de l'ellipse, et pour axe des y la tangente au sommet (fig. 18); l'équation de l'ellipse est de la forme

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2);$$

combinant l'équation de la droite AD, $y = \delta x$, avec l'équation de l'ellipse, j'ai pour l'abscisse du point C

$$AQ = \frac{2ab^2}{a^2\delta^2 + b^2};$$

or, on a $\frac{AD}{AC} = \frac{m}{n}$, ou bien $\frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$, désignant par (x, y) les coordonnées du point D, cette relation devient

$$\frac{x(a^2\delta^2 + b^2)}{2ab^2} = \frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2ab^2m}{n(a^2\delta^2 + b^2)},$$

et

$$y = \frac{2ab^2m\delta}{n(a^2\delta^2 + b^2)};$$

connaissant les coordonnées des points C, D, l'équation de FD est

$$y = \frac{2ab^2m\delta}{2ab^2m - \alpha n(a^2\delta^2 + b^2)}(x - \alpha) \quad (1), \quad AF = \alpha,$$

et celle de CB est

$$y = \frac{-b^2}{a^2\delta}(x - 2a) \qquad (2).$$

Eliminant δ entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu cherché.

De (2), je tire $\delta = \frac{-b^2(x - 2a)}{a^2y}$, portant cette valeur de δ dans l'équation (1), il vient

$$y = \frac{\dfrac{2ab^4m(2a - x)(x - \alpha)}{a^2y}}{2ab^2m - \alpha n\left(\dfrac{b^4(2a - x)^2}{a^2y^2}\right) + b^2}$$

réduisant et ordonnant, il vient

$$a^2(2am - \alpha n)y^2 + b^2(2am - \alpha n)x^2 +$$
$$+ 2ab^2(2\alpha n - 2am - m\alpha)x + 4a^2b^2\alpha(m - n) = 0,$$

equation du second degré qui représente une ellipse, si la courbe primitive est une ellipse, et une hyperbole dans le cas de l'hyperbole : elle a son centre sur l'axe des x et elle passe au point B.

Si $m = n$, on retombe sur l'équation de l'ellipse primitive

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Pour passer au cas où la courbe donnée est une parabole, comme a et b deviennent infinis en même temps, on ne voit pas immédiatement ce que devient l'équation du lieu, alors on remplace b en fonction de a et de α; en s'appuyant sur la distance d'un point de la courbe au foyer, on trouve $b^2 = 2a\alpha - \alpha^2$; l'équation du lieu devient

$$a^2(2am - \alpha n)y^2 + (2a\alpha - \alpha^2)(2am - \alpha n)x^2 +$$
$$+ 2a(2a\alpha - \alpha^2)\big(\alpha(2n - m) - 2am\big)x + 4a^2\alpha(2a\alpha - \alpha^2)(m - n) = 0;$$

faisant a infini dans cette équation, elle devient

$$my^2 - 4\alpha mx + 4\alpha^2(m - n) = 0,$$
$$\text{ou } y^2 = 4\alpha\left(x - \frac{\alpha(m - n)}{m}\right),$$

équation d'une parabole. Si $m = n$, on trouve l'équation de la parabole primitive $y^2 = 4\alpha x$.

Ainsi on voit que pour le cas de la parabole, au lieu de tirer la droite BC, il faut, par le point C, mener une parallèle à l'axe focal.