NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PROUHET

Solution du problème 63

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 19-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__19_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 63 (tome II, p. 416).

PAR M. A. PROUHET,
Elève de mathématiques spéciales au collège d'Auch.

Etant donnés les milieux des côtés d'un polygone convexe, d'un nombre impair de côtés, déterminer ses sommets en faisant seulement usage du compas

1° Soient d'abord A, B, C les milieux des côtés d'un triangle, et proposons-nous d'en déterminer les sommets. Supposons le problème résolu soient A′, B′, C′ les sommets cherchés (*fig.* 2), d'après un théorème connu, la droite qui joint A et B est parallèle à A′B′, de même BC est parallèle à C′B′, nous aurons donc dans la figure ABCB′ un parallélogramme dont un des sommets est le sommet cherché; or nous connaissons trois sommets de ce parallélogramme, il nous sera facile de déterminer le quatrième. Pour cela je décris deux circonférences : la première du point A, comme centre, avec un rayon égal à BC; la deuxième du point C, comme centre, avec un rayon égal à AB; l'intersection de ces deux circonférences sera le sommet cherché; on déterminerait de même les points A′, C′.

2° Si maintenant nous avons pour données les milieux des côtés d'un polygone, d'un heptagone, par exemple, le problème sera ramené au cas précédent, dès que nous serons parvenus à trouver les milieux des diagonales qui joignent les extrémités des côtés consécutifs.

Supposons le problème résolu : soient A, B, C.... (*fig.* 3) les milieux donnés, A′, B′, C′.... les sommets opposés.

Dans le quadrilatère C′ D′ E′ F′ on connaît les milieux de trois côtés ; le milieu R du quatrième se déterminera à l'aide du compas, car d'après un théorème connu, ces quatre points doivent être les sommets d'un parallélogramme. De même les milieux de trois côtés du quadrilatère C′ F′ G′ B′ étant connus, on déterminera le milieu S du quatrième ou de la diagonale G′ B′, on aura donc ainsi les milieux des côtés du triangle A′, B′, C′ et par leur moyen les trois sommets A′, B′, G′.

3° On trouvera de même tant de sommets que l'on voudra de l'heptagone; mais dès que l'on connaît le sommet A′ il suffit, pour avoir les autres, de savoir résoudre ce problème : *Étant donnés l'extrémité* A′ *d'une ligne et son milieu* E (fig. 3) *déterminer à l'aide du compas l'autre extremite* B′. Du point E, comme centre, avec une ouverture de compas égale à EA′, je décris une circonférence. Portant ensuite la même ouverture de compas sur cette circonference, à partir de A′, je détermine les sommets de l'hexagone régulier inscrit. Le sommet opposé à A′ est évidemment le point cherche B′, connaissant B′ et F on determinera de même C′, et ainsi de suite.

La construction que nous venons de donner s'étend facilement à un polygone d'un nombre impair de côtés, car un pareil polygone est toujours décomposable en plusieurs quadrilatères et triangles.

4° On peut se convaincre, à posteriori, que le problème admet toujours une solution, et n'en admet qu'une. En effet, si on construit tous les sommets d'abord depuis A′ jusqu'à D′, ensuite depuis A′ jusqu'à E′, il est bien évident que les points B, C, D, E, F, G sont les milieux des six côtés du polygone obtenu, mais on ne voit pas aussi clairement que A devra être le milieu du côte D′E′. Nous allons démontrer qu'il est aussi le milieu. La ligne B′ G′ a pour milieu le point S, car ce milieu doit se trouver à la fois sur la ligne DS parallèle à A′B′, et sur la ligne ES parallèle à A′G′, de même R sera le milieu de C′F′, car le milieu doit se trouver sur CR droite parallèle à la diagonale C′G′, et sur la droite FR parallèle à B′F′ : même démonstration pour prouver que A est le milieu de D′E′.

5° Le problème analogue pour les polygones d'un nombre pair de côtés, ou admet une infinité de solutions, ou n'en admet aucune. D'abord si on donne quatre points comme étant les milieux des côtés d'un quadrilatère, le problème sera impossible si les quatre points ne sont pas les sommets d'un parallélogramme; mais supposons cette condition remplie. Par le point B je mène (*fig.* 4) une droite quelconque sur laquelle je prends de chaque côté deux longueurs égales BF, BE, je joins E au point A, et prends AH = AE; je joins F au point C, et prends CG = CF, on verra par un raisonnement analogue à celui fait dans le n° 3 pour le quadrilatère B′C′F′G′, que la ligne HG passera par le point D, et y sera partagée en deux parties égales. Le quadrilatère construit sera donc une solution du problème, qui en admet une infinité, puisque la direction et la grandeur de la ligne EF sont arbitraires.

Ensuite pour un polygone quelconque d'un nombre pair de côtés, on pourra construire un quadrilatère tel que trois des points donnés soient les milieux de trois de ses côtés; puis un second quadrilatère, ayant un côté commun avec le premier, et tel que deux autres des points donnés, soient les milieux de deux de ses côtés, et ainsi de suite. Le problème sera impossible, si le dernier côté du dernier quadrilatère n'a pas pour milieu le dernier point donné. Si cette condition est remplie, le problème sera possible, mais admettra une infinité de solutions, puisque le premier quadrilatère peut varier d'une infinité de manières.